

УДК 239.374

Академик М. А. Задоян

Малонапряженность составного многоклина

(Представлено 22/X 1999)

Рассматривается задача малонапряженности при продольном сдвиге составного клина, изготовленного из n призматических тел, материалы которых упрочняются по степенному закону $\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$, где σ_0 и ε_0 интенсивности напряжений и деформаций, параметр m для всех материалов принимается одинаковым, а модули деформации k - различными.

Проблема малонапряженности клина, составленного из двух линейно-упругих материалов, впервые исследована в [1]. Для упрочняющихся тел такая задача рассмотрена в [2].

Разберем отдельно случай, когда внешние края составного клина свободны от внешних сил (открытый клин), и случай, когда не имеется внешних радиальных краев, т.е. угловая точка находится внутри тела (закрытый клин). Задача исследуется без допущения о знакопеременности перемещения.

Углы при вершинах составляющих клиньев обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Полагаем также $A_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$, причем $A_0 = 0$ и $i = 1, 2, \dots, n$.

В окрестности угловой точки для каждого составляющего клина решение ищем в форме

$$\begin{aligned} \tau_{ri} &= \lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, & \tau_{\theta i} &= k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i \\ w_i &= r^\lambda f_i, & \chi_i &= \left(\frac{\sqrt{f_i^2 + \lambda^2 f_i'^2}}{f_i^2 + \lambda^2 f_i'^2} \right)^{m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем $i = 1, 2, \dots, n$, $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ система искомых функций, λ неопределенный параметр, играющий роль собственного значения.

Подставляя выражения компонентов напряжений (1) в третьем уравнений равновесия, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f_i \chi_i)' + \eta f_i \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda[1 + (\lambda - 1)m], \quad (2)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Вводя новую функцию $\psi_i(\theta, \lambda)$ -

$$f_i = f_i \psi_i, \quad (3)$$

приходим к уравнению первого порядка

$$\psi_i' = - \frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + \omega^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 p}, \quad (4)$$

где $\omega^2 = \lambda(\lambda + p - 1)$, $p = 1/m$. Общее решение этого уравнения будет

(5)

The diagram shows a circular sector with a central angle θ . The sector is divided into n regions, labeled $k_1, k_2, \dots, k_n$. The boundaries of these regions are labeled $A_0, A_1, \dots, A_n$. The radii are labeled r . The angles between the boundaries are labeled $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

1. Открытый клин. Когда внешние края клина свободны от внешних сил, имеем условия

В этом случае граничным условием для уравнения (4) будет

На контактных поверхностях имеем условия непрерывности $\tau_{\theta i}$ -

где $i=1,2,\dots,n-1$ и введены обозначения

Используя условия (6), из (5) получаем

$$\operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\omega} = -\alpha_1, \quad (9)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{v_{n-1}}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{v_{n-1}}{\omega} = \alpha_n,$$

Далее, используя решения (5) для различных составляющих клиньев, а затем исключая последовательно $H_2, H_3, \dots, H_{n-1}$, приходим к уравнениям

$$\operatorname{arctg} \frac{v_{i-1}}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{v_{i-1}}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\omega} \right) = \alpha_i, \quad (10)$$

причем $i=2, 3, \dots, n-1$. Таким образом, (7), (9) и (10) образуют систему из $2n-1$ уравнений с $2n-1$ неизвестными постоянными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}; \lambda$, определяющую собственное значение

$$\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}; m),$$

в зависимости от $2n$ параметров составного клина.

Для линейно-упругих материалов, $m=1$, из (7) имеем

$$\mu_i = \delta_i v_i, \quad (11)$$

где $i=1, 2, \dots, n-1$. Вводя новые неизвестные постоянные φ_i -

$$v_{i-1} = \lambda \operatorname{tg} \lambda \varphi_i, \quad (12)$$

из (10) находим

$$\mu_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i - \alpha_i). \quad (13)$$

Используя (11), получаем

$$\operatorname{tg} \lambda (\alpha_i - \varphi_i) + \delta_i \operatorname{tg} \lambda \varphi_{i+1} = 1, \quad (14)$$

причем $i=1, 2, \dots, n-1$, $\varphi_1=0$, $\varphi_n=\alpha_n$. Полученная система (10) содержит $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными постоянными $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}, \lambda$.

Исключая последовательно из этих уравнений φ_i , приходим к трансцендентному уравнению относительно λ .

Перейдем к нелинейной задаче; полагая $\lambda = 1$, затем принимая $v_{i-1} = \operatorname{tg} \varphi_i$ согласно (11) и $\mu_i = \operatorname{tg}(\varphi_i - \alpha_i)$ согласно (13), из (7) приходим к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{tg} (\alpha_i - \varphi_i) |\cos(\alpha_i - \varphi_i)|^{1-m} + \delta_i \operatorname{tg} \lambda \varphi_{i+1} |\cos \varphi_{i+1}|^{1-m} = 0 \quad (15)$$

причем $i=1, 2, \dots, n-1$. Полученная система состоит из $n-1$ уравнений с $n-2$ неизвестными постоянными φ_i . После исключения этих неизвестных в принципе проходим в $2n$ -мерном пространстве параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}; m$ к уравнению гиперповерхности конечных напряжений.

Интегрируя уравнения (7), получаем

$$f_i = D_i \exp \left| \int_{A_{i-1}}^{\theta} \psi_i d\theta \right|, \quad A_{i-1} \leq \theta \leq A_i, \quad (16)$$

где D_i -произвольные постоянные, $i=1,2,\dots,n$. Используя условия непрерывности перемещения на контактных поверхностях, находим выражения D_i , через $D_1=f_i(0)$ –

$$D_i = D_1 \exp \left| \sum_{j=1}^{i-1} \int_{A_{j-1}}^{A_j} \psi_j d\theta \right|, \quad (17)$$

где $i=2,3,\dots,n$.

В частном случае трехклина $n=3$, обозначая $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$, $\alpha_3=\gamma$, из (9), (10) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} &= -\alpha, \\ \operatorname{arctg} \frac{\nu_1}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \left| \operatorname{arctg} \frac{\nu_1}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\omega} \right| &= \beta, \\ \operatorname{arctg} \frac{\nu_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\nu_2}{\omega} &= \gamma, \end{aligned}$$

которые совместно с уравнениями (7) при $i=1,2$ составляют систему из 5 уравнений, определяющую $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2, m)$. Полагая также в (15) $n=3$, $\varphi_2=\varphi$, будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha |\cos \alpha|^{1-m+\delta_1} \operatorname{tg} \varphi |\cos \varphi|^{1-m} &= 0, \\ \operatorname{tg} (\beta - \varphi) |\cos (\beta - \varphi)|^{1-m+\delta_2} \operatorname{tg} \gamma |\cos \gamma|^{1-m} &= 0, \end{aligned}$$

определяющую в координатном пространстве $\alpha\beta\gamma$ поверхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны концентрации напряжений.

2. Закрытый клин. В этом случае тело состоит из n составляющих клиньев из различных материалов, соединенных по n контактным поверхностям (рис.2). В каждом составляющем клине решение представляется в виде (5), причем здесь $A_n=2\pi$ и имеем n контактных условий

$$\mu_i \left| \sqrt{\mu_i^2 + \lambda^2} \right|^{m-1} + \delta_i v_i \left| \sqrt{v_i^2 + \lambda^2} \right|^{m-1} = 0, \quad (18)$$

причем $i=1,2,\dots,n$. Обозначения (8) сохраняются, но следует принять

$$v_n = v_0 = \psi_1(0, \lambda), \quad \delta_n = k_1/k_n.$$

Применяя решения (5) для различных составляющих клиньев и последовательно исключая неизвестные постоянные H_i , получаем

$$\arctg \frac{v_{i-1}}{\lambda} + \arctg \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \left| \arctg \frac{v_{i-1}}{\omega} + \arctg \frac{\mu_i}{\omega} \right| = \alpha_i, \quad (19)$$

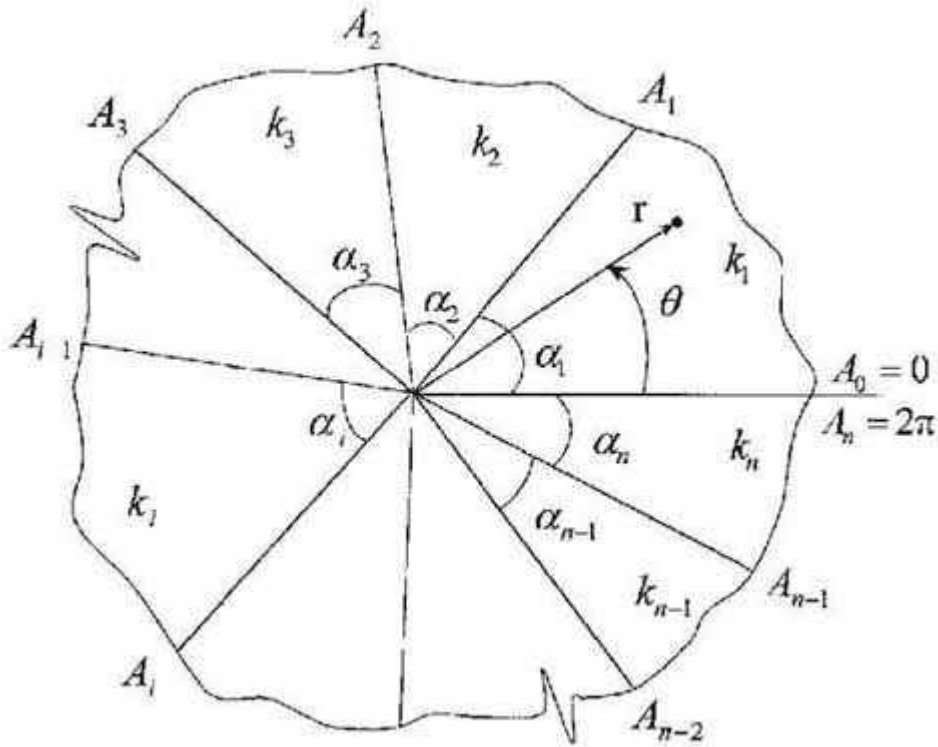


Рис. 2.

причем $i=1,2,\dots,n$. Таким образом (18) и (19) образуют систему из $2n$ уравнений с $2n+1$ неизвестными постоянными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; v_1, v_2, \dots, v_n, \lambda$.

Для получения недостающего уравнения используем условия непрерывности перемещения на контактных поверхностях. Выражения f_i , представленные в (16)-(17), удовлетворяют этим условиям на $n-1$ контактных поверхностях. На контактной же поверхности $\theta = 2\pi, 0$ имеем условие

$$f_n(2\pi)=f_1(0).$$

Подставляя в это условие f_n и f_1 из (16), получаем

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_i-1}^{A_i} \psi_i d\theta = 0. \quad (20)$$

Таким образом, система уравнений (18)-(20) в принципе определяет λ –

$$\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, m),$$

следует отметить, что число независимых параметров будет $2n-1$, поскольку

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi \quad \text{и} \quad \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n = 1.$$

Выражая в (5) постоянные H_i через μ_i , будем иметь

$$\arctg \frac{\psi_i}{\lambda} - \arctg \mu_i \lambda + \frac{1-\lambda}{\omega} \left(\arctg \frac{\psi_i}{\omega} - \arctg \frac{\mu_3}{\omega} \right) = A_i - \theta, \quad (21)$$

причем $i=1, 2, \dots, n$ и $A_n=2\pi$.

Для линейно-упругих материалов, $m=1$, вводя новые неизвестные постоянные φ_i ,

$$\mu_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda \varphi_i, \quad (22)$$

где $i=1, 2, \dots, n$. Из (19) получаем

$$v_{i-1} = \lambda \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i + \alpha_i). \quad (23)$$

Подставляя эти значения μ_i и v_i в уравнения (18), при $m=1$ получаем

$$\operatorname{tg} \lambda \varphi_i - \delta_i \operatorname{tg} \lambda (\varphi_{i+1} + \alpha_{i+1}) = 0, \quad (24)$$

причем $i=1, 2, \dots, n$ и $\varphi_{n+1} = \varphi_1$, $\alpha_{n+1} = \alpha_1$. Система (24) состоит из n уравнений с неизвестными постоянными $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Далее полагая в (21) $m=1$, находим

$$\psi_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i + A_i - \theta), \quad (25)$$

где $i=1, 2, \dots, n$. Подставляя (25) в условие (20), будем иметь

$$\prod_{i=1}^n (\cos \lambda \alpha_i + \sin \lambda \alpha_i \operatorname{tg} \lambda \varphi_i) = 1 \quad (26)$$

Исключая из (21) и (26) φ_i , приходим к трансцендентному уравнению относительно

$$\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

Возвращаясь к нелинейной задаче, положим $\lambda = 1$. Далее, из (22)-(23) определяя

$$\mu_i = \operatorname{tg} \varphi_i, \quad v_{i-1} = \operatorname{tg} (\varphi_i + \alpha_i),$$

причем $i=1, 2, \dots, n$ и подставляя в (18), будем иметь

$$\operatorname{tg} \psi_i |\cos \varphi_i|^{1-m} - \delta_i \operatorname{tg} (\varphi_{i+1} + \alpha_{i+1} |\cos (\varphi_{i+1} + \alpha_{i+1})|^{1-m}) = 1. \quad (27)$$

Здесь $i=1,2,\dots,n$, а также $\varphi_{n+1}=\varphi_1$, $\alpha_{n+1}=\alpha_1$.

Система уравнений (27) содержит n неизвестных постоянных φ_i .

Далее принимая $\lambda = 1$ и используя (22), из (21) находим

$$\varphi_i = \operatorname{tg} (A_i + \varphi_i - \theta), \quad (28)$$

причем $i=1,2,\dots,n$. Подставляя (28) в (20), будем иметь

$$\prod_{i=1}^n (\cos \alpha_i - \sin \alpha_i \operatorname{tg} \varphi_i) = 1 \quad (29)$$

Полученное уравнение совместно с системой уравнений (27) в $2n-1$ -мерном пространстве параметров в принципе определяет уравнения гиперповерхности конечных напряжений.

В случае составного трехклина, $n=3$, написав уравнения (19) при $i=1,2,3$ и полагая $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$, $\alpha_3=2\pi-(\alpha+\beta)$, приходим к системе из трех уравнений относительно неизвестных φ_1 , φ_2 , φ_3 , которые вместе с уравнением

$$(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi_1)(\cos \beta - \sin \beta \operatorname{tg} \varphi_2)[\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) \operatorname{tg} \varphi_3] = 1,$$

следующим из (29), определяют в координатной плоскости $\alpha\beta$ уравнения предельных линий конечных напряжений.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Чобанян К.С. Напряжения в упругих составных телах. Ереван: Изд. АН Арм ССР, 1987. 338 с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 387 с.

Ակադեմիկոս Մ.Ա. Զադոյան

Բաղադրյալ բազմասեպի թերլարվածությունը

Ուսումնասիրվում է աստիճանային ամրապնդվող նյութերից կազմված բազմասեպի թերլարվածության խնդիրը երկայնական սահքի պայմաններում:

Առանձին-առանձին հետազոտվում են այն դեպքերը, երբ արտաքին եզրերը կոշտ ամրացված են, և երբ տրված են խառը եզրային պայմաններ, այսինքն մի եզրը կոշտ ամրացված է, իսկ մյուսը ազատ է: Այնուհետև քննարկվում է այն խնդիրը, երբ անկյունային կետը գտնվում է բաղադրյալ մարմնի ներսում:

Բոլոր ուսումնասիրվող դեպքերում վերջին հաշվով ստացվում են տրանսցենդենտ հավասարումների համակարգ, որից որոշվում է սեփական արժեքը և այնուհետև թերլարվածության հիպերմակերևույթը: