

К. И. Караханян

**Об одном способе интегрирования обыкновенных
однородных линейных дифференциальных
уравнений второго порядка и его приложениях**

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 27/I 2000)

Большое количество задач во многих областях науки и техники сводится к обыкновенным однородным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + 2Gy' + Hy = 0. \quad (1)$$

Решение ряда краевых задач математической физики, в частности теории упругости, выражаемых уравнениями с частными производными, с применением метода разделения переменных, как известно, также приводится к этим уравнениям.

В качестве примера рассмотрим простейшую задачу поперечных свободных колебаний неоднородной струны. Смещение $u(x, t)$ точки струны удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$F_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где $F_0 = \text{const}$ - сила натяжения, $\rho(x)$ - линейная плотность в точке x . Представляя $u(x, t)$ в виде произведения $X(x) \cdot T(t)$, после разделения переменных получим два уравнения типа (1):

$$X''(x) + J(x) \cdot X(x) = 0, \quad J(x) = \lambda \frac{\rho(x)}{F_0}, \quad (3)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0$$

Решение этих уравнений для произвольной $\rho(x)$, при соответствующих граничных и начальных условиях, является, как известно, довольно трудной задачей.

Хотя существует большое количество достаточно эффективных методов, нахождение решения основных уравнений в общем случае остается одной из актуальных проблем современной теории упругости, механики сплошной среды и вообще прикладной математики. Эти вопросы отражены во многих трудах, в частности [1–3], в которых приведена также обширная библиография.

В данной статье предложен способ, позволяющий найти решение (1), предполагая лишь, что $G(x)$ - непрерывно дифференцируемая, а $H(x)$ - непрерывная функция от x в той области, в которой требуется проинтегрировать это уравнение. Эти условия, накладываемые на коэффициенты $G(x)$ и $H(x)$, не ограничивают общность предложенного способа, так как во многих прикладных задачах они удовлетворяются. В этом смысле способ можно считать общим.

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что если найдено одно нетривиальное частное решение $y_1(x)$ уравнения (1), то в принципе его можно считать решенным, так как общий интеграл может быть найден при помощи квадратур

$$y=c_1y_1+c_2y_1 \int \frac{e^{-2\int Gdx}}{y_1^2} dx, \quad (4)$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные.

Хотя теория линейных дифференциальных уравнений является наиболее разработанной частью теории дифференциальных уравнений, в настоящее время не разработаны достаточно эффективные аналитические методы для определения $y_1(x)$ в конечном виде или даже при помощи квадратур при произвольных $G(x)$ и $H(x)$. Как известно, такой метод существует только для уравнений с постоянными коэффициентами.

Перейдем к изложению сущности предложенного способа. Полагая

$$y=we^{-\int Gdx}, \quad (5)$$

получаем из (1) нормальную форму уравнения типа (3)

$$\begin{aligned} w''+Jw &= 0, \\ J &= H-G^2-G', \end{aligned} \quad (6)$$

где $J=J(x)$ называется инвариантом уравнения (1). Эта функция остается неизменной при всех преобразованиях вида (5), и следовательно, ее можно принять за главную характеристику данного уравнения. Существование и непрерывность $J(x)$ обеспечены вышеуказанными условиями, накладываемыми на коэффициенты $H(x)$ и $G(x)$.

Выразим $y_1(x)$ через $J(x)$. С этой целью введем вместо $y_1(x)$ новую искомую функцию $u(x)$

$$y_1=ue^{\int ([1/2]-G) dx}. \quad (7)$$

Подстановка в уравнение (1) дает

$$u''+u'+\left(J+\frac{1}{4}\right)u=0. \quad (8)$$

Частное решение уравнения (8) ищем в виде ряда [4]

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} u_k. \quad (9)$$

Предполагая, что ряд (9) сходится равномерно, подставив в (8), получим

$$u''_0+u'_0+\frac{u_0}{4}+\sum_{k=0}^{\infty} \left(u''_{k+1}+u'_{k+1}+\frac{u_{k+1}}{4}+Ju_k\right)=0. \quad (10)$$

Подберем коэффициенты $u_k(x)$ ряда (9) так, чтобы

$$u''_0 + u'_0 + \frac{u_0}{4} = 0,$$

$$u''_{k+1} + u'_{k+1} + \frac{u_{k+1}}{4} = -Ju_k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Рассматривая второе уравнение как неоднородное и произведя интегрирование этого уравнения, для коэффициентов $u_k(x)$ получим рекуррентную формулу

$$u_0 = e^{-x/2},$$

$$u_{k+1} = -e^{-x/2} \int \left(\int Ju_k e^{x/2} dx \right) dx = (-1)^{k+1} e^{-x/2} T_{k+1}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Здесь введены новые коэффициенты $T_k(x)$, которые определяются аналогичной рекуррентной формулой

$$T_0 = 1,$$

$$T_{k+1} = \int \left(\int JT_k dx \right) dx, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

или

$$T''_{k+1} = JT_k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Тогда частное решение уравнения (8) будет представляться в виде ряда из коэффициентов $T_k(x)$

$$u = -e^{-x/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_k. \quad (12)$$

При этом предполагается, что ряд (12) сходится равномерно и существуют все входящие сюда интегралы.

Подставив (12) в (7) и используя (5), легко найдем частные решения уравнений (1) и (6). Они, соответственно, будут иметь вид

$$y_1 = e^{-\int G dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_k, \quad (13)$$

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_k. \quad (14)$$

Будем считать, что рассматриваемый интервал содержит точку $x=x_0$. Путем интегрирования в промежутке значения от x_0 до переменного значения x , а также используя формулу Дирихле об изменении порядка интегрирования для $T_k(x)$ из рекуррентной формулы (11), получим

$$\begin{aligned}
 T_1(x) &= \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x J(t) dt = \int_{x_0}^x J(t) dt \int_t^x dx = \int_{x_0}^x (x-t) J(t) dt, \\
 T_2(x) &= \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x J(t_1) T_1(t_1) dt_1 = \int_{x_0}^x (x-t_1) J(t_1) dt_1 \int_{x_0}^{t_1} (t_1-t) J(t) dt, \\
 T_k(x) &= \int_{x_0}^x (x-t_{k-1}) J(t_{k-1}) dt_{k-1} \int_{x_0}^{t_{k-1}} (t_{k-1}-t_{k-2}) J(t_{k-2}) dt_{k-2} \dots \int_{x_0}^{t_1} (t_1-t) J(t) dt.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, предложенный способ позволяет привести интегрирование всех уравнений типа (1) к повторным квадратурам, при произвольных $G(x)$ и $H(x)$. При этом задача интегрирования этих уравнений считается выполненной. Такой подход является вполне закономерным, поскольку для любой непрерывной функции всегда можно (точно или приближенно) найти квадратуру и тем самым полностью решить поставленную задачу, в частности задачу (3) при произвольной $\rho(x)$.

Отличие предложенного способа от существующих многочисленных методов заключается в том, что он является достаточно общим: не основывается на конкретных видах коэффициентов уравнения (1) и не предполагает каких-либо связей между ними, позволяет строить алгоритмы рекуррентного типа для этого уравнения, которые легко программируются на ЭВМ, а также провести нужную классификацию уравнений вида (1) по их инварианту, если это уравнение представить в виде

$$y'' + 2Gy' + (J + G^1 + G^2)y = 0. \tag{16}$$

Беря рекуррентную формулу (11) в виде

$$T_0 = 1, \quad T_{k+1}^{(n)} = J T_k, \quad n=1, 2, \dots, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

легко показать, что способ позволяет найти также частное решение уравнения n -го порядка

$$U^{(n)} + J U = 0.$$

Если независимую переменную x , как при выводе формулы (15), ограничить в интервале (x_0, x) , то коэффициенты $T_k(x)$ вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка обращаются в нули при $x=x_0$. Поэтому при нахождении этих коэффициентов можно использовать формулу Коши, позволяющую n -кратный повторный интеграл преобразовать к одному интегралу по параметру. Тогда для $T_k(x)$ получим

$$T_1(x) = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x J(x) dx = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} J(t) dt,$$

$$T_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t_1)^{n-1}}{(n-1)!} J(t_1) T_1(t_1) dt_1 = \int_{x_0}^x \frac{(x-t_1)^{n-1}}{(n-1)!} J(t_1) dt_1 \int_{x_0}^{t_1} \frac{(t_1-t)^{n-1}}{(n-1)!} J(t) dt,$$

$$T_k(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t_{k-1})^{n-1}}{(n-1)!} J(t_{k-1}) dt_{k-1} \int_{x_0}^{t_{k-1}} \frac{(t_{k-1}-t_{k-2})^{n-1}}{(n-1)!} J(t_{k-2}) dt_{k-2} \dots \int_{x_0}^{t_1} \frac{(t_1-t)^{n-1}}{(n-1)!} J(t) dt$$

В качестве приложения предложенного способа решения дифференциальных уравнений приведем решения некоторых типов уравнения (1). Будем указывать для них выражения инварианта $J(x)$, коэффициентов $T_k(x)$ и частное решение $y_1(x)$.

$$1. y'' + 2Gy' + (G^2 + G')y = 0, \quad J=0,$$

$$T_0=1, \quad T_k=0, \quad \text{при } k \geq 1,$$

$$y_1 = e^{-\int G dx}.$$

$$2. y'' + 2Gy' + (a + G^2 + G')y = 0, \quad J=a=\text{const},$$

$$T_k = \frac{a^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{при } k \geq 0,$$

$$y_1 = e^{-\int G dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k x^{2k}}{(2k)!} = e^{-\int G dx} \begin{cases} \cos \sqrt{a}x, & \text{при } a > 0 \\ \text{ch } \sqrt{a}x, & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

К уравнениям этого типа относятся также дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, для которых корни характеристического уравнения различны, если $J \neq 0$, и кратные при $J=0$

$$3. y'' + 2Gy' + (a e^{bx} + G' + G^2)y = 0, \quad J = a e^{bx},$$

$$T_k = \frac{a^k}{(k!)^2 b^{2k}} e^{kbx} \quad \text{при } k \geq 0,$$

$$y_1 = e^{-\int G dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{(k!)^2 b^{2k}} e^{kbx} = e^{-\int G dx} J_0 \left(2 \frac{\sqrt{a}}{b} e^{[bx/2]} \right),$$

J_0 - функция Бесселя нулевого порядка.

$$4. y'' + 2Gy' + (ax^\alpha + G^2 + G')y = 0, \quad J = ax^\alpha,$$

$$\alpha \geq 0, \quad T_k = \frac{(av^2x^{[1/(v)]})^k \Gamma(1-v)}{k! \Gamma(k-v+1)}, \quad v = \frac{1}{\alpha+2}, \quad \text{при } k \geq 0,$$

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(av^2x^{[1/(v)]})^k \Gamma(1-v)}{k! \Gamma(k-v+1)} = \sqrt{x} e^{-\int G dx} J_{-v}(2\sqrt{av} x^{[1/(2v)]}).$$

5. Общее уравнение Риккати

$$z'(x) = f(x)z^2 + g(x)z + h(x)$$

подстановкой $z = -(y')/fy$ сводится к уравнению (1) с инвариантом

$$J = fh - \frac{1}{4} \left(\frac{f'}{f} + g \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{f'}{f} + g \right),$$

и, следовательно, может быть решено предложенным способом.

$$6. \quad y'' + 2Gy' + (a + bx^\alpha + G^2 + G')y = 0, \quad J = a + bx^\alpha, \quad \alpha \geq 0.$$

Решение этого уравнения при произвольных α неизвестно.

В [5] приводится частный случай, когда $G(x) = 0$; $\alpha = 2n$; $y'' = (a^2x^{2n} - 1)y$. В результате последовательного интегрирования получим

$$T_k = \sum_{n=0}^k a^{k-n} b^n T_{kn} x^{n\alpha+2k}, \quad \text{при } k \geq 0.$$

Величины T_{kn} составляют левую треугольную матрицу

$$\begin{matrix} T_{00} \\ T_{10} & T_{11} \\ T_{k0} & T_{k1} & T_{k2} & \dots & T_{kk} \end{matrix}$$

и определяются рекуррентными формулами

$$T_{k0} = \frac{1}{(2k)!} \quad \text{при } k \geq 0, \quad a(0)! = 1$$

$$T_{kn} = \frac{T_{k-1n} + T_{k-1n-1}}{\left[\begin{matrix} n \\ -+2(k-n) \\ v \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} n \\ -+2(k-n)-1 \\ v \end{matrix} \right]} \quad \text{при } k \geq 1, \quad \text{при } n \geq 1, \quad a \quad v = \frac{1}{\alpha+2}.$$

Отсюда для $k=1, 2, \dots; n=1, 2, \dots, k$

$$T_{kn} = \frac{1}{\Gamma \left[\begin{matrix} n \\ -+2(k-n)+1 \\ v \end{matrix} \right]} \sum_{j_1=0}^{k-n} \frac{\Gamma \left(2j_1-1+\frac{1}{v} \right)}{\Gamma(2j_1+1)} \left(\sum_{j_2=j_1}^{k-n} \frac{\Gamma \left(2j_2-1+\frac{2}{v} \right)}{\Gamma \left(2j_2+1+\frac{1}{v} \right)} \right) \dots$$

$$\dots \sum_{j_n=j_{n-1}}^{k-n} \frac{\Gamma \left(2j_n-1+\frac{n}{v} \right)}{\Gamma \left(2j_n+1+\frac{n-1}{v} \right)} .$$

Число членов в каждом элементе T_{kn} равно $(k \parallel n)$, а в каждой строке матрицы - 2^k , так что

$$\sum_{n=0}^k \left(\begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right) = 2^k .$$

Совместимость полученных результатов для T_{kn} легко показать, так как любую повторную сумму такого типа можно представить в виде

$$\underbrace{\sum_{j_1=0}^{k-n} a(j_1) \dots \sum_{j_n=j_{n-1}}^{k-n} a(j_n)}_n = \underbrace{\sum_{j_1=0}^{k-n-1} a(j_1) \dots \sum_{j_n=j_{n-1}}^{k-n-1} a(j_n)}_n + a(k-n) \underbrace{\sum_{j_1=0}^{k-n} a(j_1) \dots \sum_{j_{n-1}=j_{n-2}}^{k-n} a(j_{n-1})}_{n-1} .$$

Частным решением этого уравнения в общем случае будет ряд (13). Подробное исследование его сходимости и свойства при различных α и параметрах a и b - предмет отдельного рассмотрения.

Выражаю благодарность С. М. Мхитаряну за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

Литература

1. В. З. Партон, П. И. Перлин. Методы математической теории упругости. М.: Наука. 1981.
2. Л. И. Седов. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. ФМ. 1983, 1984.
3. Л. А. Агаловян. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997.
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. Ч. 1. М.: Наука, 1963.
5. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

Կ. Ի. Ղարախանյան
Երկրորդ կարգի սովորական գծային համասեռ
դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրման մի եղանակի
և նրա կիրառությունների մասին

Առաջարկվում է փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի սովորական գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների կառուցման եղանակ: Ցույց է տրվում,
որ $J(x)=H(x)-G^2(x)-G'(x)$ ինվարիանտն ունեցող

$$y''+2Gy'+Hy=0$$

հավասարման մասնակի լուծումը կարելի է ներկայացնել

$$y_1=e^{-\int Gdx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T_k(x),$$

անվերջ շարքի տեսքով, եթե մտցվեն $T_k(x)$ գործակիցներն այնպես, որ որոշվեն
 $T_0=1, \quad T''_k=JT_{k-1}, \quad k=0, 1, 2, \dots$

ռեկուրենտ բանաձևով:

Ենթադրվում է, որ $G(x)$ -ը անընդհատ դիֆերենցելի, իսկ $H(x)$ -ը անընդհատ ֆունկցիաներ են, և շարքը զուգամիտում է հավասարաչափ: Եղանակի կիրառմամբ ստացված են մի շարք դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրալները: