

Г. В. Даллакян

Аппроксимация решений полуэллиптического уравнения в R^n решениями граничных задач в обобщенном шаре большого радиуса

(Представлено академиком Г. Е. Багдасаряном 11/VIII 1999)

Пусть R^n – n -мерное евклидово пространство точек с вещественными координатами, N_0^n – множество n -мерных мультииндексов, т.е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, $m = (m_1, \dots, m_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) = ([1/(m_1)], \dots, [1/(m_n)])$,

$$|\mu| = \sum_{j=1}^n \mu_j, \mu_0 = \min_{1 \leq j \leq n} \mu_j. \text{ Если } x \in R^n, \alpha \in N_0^n, \text{ то положим}$$

$$(\mu, \alpha) = \sum_{j=1}^n \mu_j \alpha_j, |x|_\mu = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^{2/\mu_j} \right)^{1/2},$$

$$x^\alpha = (x^{\alpha_1}_1, \dots, x^{\alpha_n}_n), D^\alpha = D^{\alpha_1}_1 \dots D^{\alpha_n}_n, D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, j=1, \dots, n.$$

Пусть $P(D)$ -линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, символ $P(\xi)$ которого представлен в виде

$$P(\xi) = P^0(\xi) + P^1(\xi) = \sum_{(\mu, \alpha)=2} \gamma_\alpha \xi^\alpha + \sum_{(\mu, \alpha) < 2} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \quad (1)$$

Определение. Оператор $P(D)$ называется полуэллиптическим (см.[1]), если существует число $\chi > 0$ такое, что

$$|P^0(\xi)| \geq \chi \left(|\xi_1|^{2/\mu_1} + \dots + |\xi_n|^{2/\mu_n} \right), \forall \xi \in R^n.$$

Для любой области $\Omega \subset R^n$ обозначим через $H^{sm}(\Omega)$ анизотропное соболевское пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{H^{sm}(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|D^{sm}_i u\|_{L_2(\Omega)} \quad (2)$$

0

Замыкание множества $C^\infty_0(\Omega)$ по норме (2) обозначим через $H^{sm}\Omega$.

Пусть $P=P(D)$ - полуэллиптический оператор вида (1) (т.е. μ порядка 2) и $Q=Q(x,D)$ - дифференциальный оператор μ - порядка не выше 2 с гладкими коэффициентами, равными нулю вне μ - шара $B_{a,\mu}=\{x \in R^n; |x|_\mu < a\}$.

Будем рассматривать в R^n полуэллиптическое уравнение

$$(P+Q)u=f \quad (3)$$

В [2] это уравнение рассмотрено при условии $P(\varepsilon) \neq 0, \forall \varepsilon \in R^n$. Там же доказано, что если $f \in L_2(R^n)$, то существует единственное стремящиеся к 0 при $|x|_\mu \rightarrow \infty$ решение $u \in H^{2m}(R^n)$ уравнения (3). Кроме того, в (2) доказано, что если $f \in L_{2,a}(R^n)$ (т.е. $f \in L_2(R^n)$ при $|x|_\mu > a$), то для любого $\sigma \geq a$ краевая задача

$$(P+Q)u_\sigma(x)=f(x), x \in B_{\sigma,\mu}, \quad (4)$$

$$u_\sigma \in H^{sm} \Omega(B_{\sigma,\mu}) \quad (5)$$

имеет единственное решение $u_\sigma \in H^m(B_{\sigma,\mu}) \cap H^{2m}(B_{\sigma,\mu})$, при этом выполняется неравенство

$$\|u-u_\sigma\|_{H^m(B_{\sigma,\mu})} \leq c e^{-\gamma_1 \sigma \mu(0)} \sigma^{1+[(|\mu|-\mu_0)/2]} \|f\|_{L_{2,a}(R^n)}, \quad (6)$$

где c, γ_1 положительные постоянные, не зависящие от f и σ .

Цель настоящей статьи - получить результаты такого типа в случае

$$P(\xi) \neq 0, \xi \in R^n \setminus \{0\}, P(0)=0 \quad (7)$$

Отметим, что для эллиптических уравнений подобная задача решена Л. Шимоном (см. (30)).

Представим оператор $P(D)$ в виде суммы μ -однородных (обобщенно однородных [4]) многочленов

$$P(D) = \sum_{j=l}^M P_j(D) \equiv \sum_{j=l}^M \sum_{(\mu,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha D^\alpha, \quad (8)$$

где $2=d_m > d_{m-1} > \dots > d_1 \geq 0$.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. Пусть оператор (8) полуэллиптичен и удовлетворяет условию (7), $P_l(\xi) \neq 0, \forall \xi \in R^n \setminus \{0\}, d_l < |\mu|$. Тогда $P(D)$ имеет единственное фундаментальное решение E , удовлетворяющее условию

$$D^\alpha E(x) = O \left(\frac{1}{|x|^{|\mu|-d_l+(\mu,\alpha)}_\mu} \right), \quad |x|_\mu \rightarrow \infty.$$

Лемма 2. Пусть оператор (8) удовлетворяет условиям леммы 1, $f \in L_{2,a}(R^n)$. Тогда уравнение

$$P(D)u=f \quad (9)$$

имеет сходящееся к нулю при $|x|_{\mu} \rightarrow \infty$ решение, притом единственное ($u(x) = O(1/(|x|_{\mu} - d_{1\mu}))$). Это решение имеет вид $u = E * f$, где E - фундаментальное решение P из леммы 1 и для любого компакта $K \subset R^n$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{L_2(K)} \leq c(K) \|f\|_{L_{2,a}(R^n)}.$$

Для случая $|\mu| > 2d_1$ можно получить более точную оценку, а именно справедлива следующая

Лемма 3. Пусть оператор $P(D)$ удовлетворяет условиям леммы 1, $|\mu| > 2d_1$ и $f \in L_1(R^n) \cap L_2(R^n)$. Тогда уравнение (9) имеет одно, и только одно, решение $u \in H^{2m}R^n$ (решение единственно также в $L_2(R^n)$), при этом

$$\|u\|_{H^{2m}(R^n)} \leq c[\|f\|_{L_1(R^n)} + \|f\|_{L_1(R^n)}]$$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$P(D)u_{\sigma} = f \quad \text{в} \quad B_{\sigma,\mu}, \quad (10)$$

$$D^{\nu_j} u_{\sigma}|_{S_{\sigma,\mu}} = 0, j=1, \dots, n, \nu_j=0, 1, \dots, m_j-1, \quad (11)$$

где $S_{\sigma,\mu} = \{x \in R^n; |x|_{\mu} = \sigma\}$ (μ -сфера).

Теорема 1. Пусть μ - однородный оператор $P(D)$ вида (8) удовлетворяет условиям леммы 2. Задача (10), (11) для $\sigma = 1$ и произвольной $f \in L_{2,1}(R^n)$ имеет единственное решение $u_1 \in H^{2m}(B_{1,\mu})$ (см. [5]). Тогда задача (10), (11) имеет решение, притом единственное, $u_{\sigma} \in H^{2m}(B_{\sigma,\mu})$, для всех $\sigma > a$ и $f \in L_{2,a}(R^n)$. Более того, разность u_{σ} и решения и уравнения (9) при достаточно больших σ может быть оценена следующим образом:

$$\|D^{\beta} u - D^{\beta} u_{\sigma}\|_{L_2(B_{\sigma,\mu})} \leq \frac{c}{\sigma^{[(|\mu|)/2]-1+(\mu,\beta)}} \|f\|_{L_{2,a}(R^n)}; (\mu,\beta) \leq 1,$$

кроме того, если $\mu_0 > \mu_i/2$ ($i=1, \dots, n$), то для любого компакта $K \subset R^n$ и $(\mu,\tau) \leq 2$

$$\sup_K |D^{\tau} u - D^{\tau} u_{\sigma}| \leq \frac{c(K)}{\sigma^{|\mu|-2+(\mu,\tau)}} \|f\|_{L_{2,a}(R^n)}.$$

В случае, когда оператор $P(D)$ не является μ -однородным, получается следующий результат:

Теорема 2. Пусть оператор (8) удовлетворяет условиям леммы 3. Многочлен $P(\xi)$ имеет вид

$$P(\xi) = \sum_{[(\mu,\alpha) \leq 1] \parallel [(\mu,\beta) \leq 1]} \gamma_{\alpha,\beta} \xi^{\alpha+\beta},$$

где $\gamma_{\alpha,\beta} \in R^1$, и для любого комплексного вектора $(\zeta_0, \dots, \zeta_{\alpha}, \dots) \neq 0$ имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{[(\mu, \alpha) = 1] \parallel [(\mu, \beta) = 1]} \gamma_{\alpha, \beta} \zeta_{\alpha} \bar{\zeta}_{\beta} > 0, \quad \sum_{[(\mu, \alpha) < 1] \parallel [(\mu, \beta) < 1]} \gamma_{\alpha, \beta} \zeta_{\alpha} \bar{\zeta}_{\beta} \geq 0.$$

Тогда для любых $f \in L_1(R^n) \cup L_2(R^n)$ и $\sigma > 0$ задача (10), (11) имеет единственное решение $u_{\sigma} \in H^{2m}(B_{\sigma, \mu})$, при этом, если $\mu_0 > \mu_i/2 (i=1, \dots, n)$, то для любого компакта $K \subset R^n$

$$\sup_K |D^{\tau} u - D^{\tau} u_{\sigma}| \leq \frac{c(K)}{\sigma^{[(|\mu|)/2] - 2 - d_1 + (\mu, \tau)}} [\|f\|_{L_1(R^n)} + \|f\|_{L_1(R^n)}],$$

где $\tau \in N_0^n$, $(\mu, \tau) \leq 2$.

Следствие. Из теорем 1,2 следует, что если $|\mu| > 2$ и $(\mu, \tau) \leq 2$, то

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \|u - u_{\sigma}\|_{H^m(B_{\sigma, \mu})} = 0,$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sup_K |D^{\tau} u - D^{\tau} u_{\sigma}| = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$P(D)u + \lambda Q(x, D)u = f, \quad (12)$$

где $P = P(D)$ - оператор (8), $Q = Q(x, D)$ - линейный дифференциальный оператор μ - порядка не выше 2 с гладкими коэффициентами, которые равняются нулю при $|x|_{\mu} \geq a$, λ - комплексный параметр, $f \in L_{2,a}(R^n)$.

Ясно, что если $|\lambda|$ достаточно мало, то $P + \lambda Q$ полуэллиптический. Обозначим через Δ множество всех значений λ , при которых оператор $P + \lambda Q$ полуэллиптический. Очевидно, Δ открыто. Связное подмножество множества Δ , которое содержит точку $\lambda = 0$, обозначим через Δ_0 . Нетрудно заметить, что если μ - порядок оператора $Q(x, D)$ меньше 2, то Δ_0 совпадает со всей комплексной плоскостью λ .

В (6) доказано, что если $\lambda \in \Delta_0$, то индекс уравнения (12) равен нулю. Кроме того, если $\lambda \in \Delta_0 \setminus \Delta_1$, где Δ_1 - некоторое счетное множество, то для любой $f \in L_2(R^n)$ уравнение (12) имеет единственное, равное нулю в бесконечности решение $u \in H^{2m}(R^n)$. Наконец рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$P(D)u + \lambda Q(x, D)u = f \text{ в } B_{\sigma, \mu}, \quad (13)$$

$$D^{\nu_j} u|_{S_{\sigma, \mu}} = 0, j=1, \dots, n, \nu_j=0, 1, \dots, m_j-1. \quad (14)$$

Теорема 3. Пусть $P(D)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, а $Q(x, D)$ - вышеперечисленным условиям, $\lambda \in \Delta \setminus \Delta_1$ - фиксированное число. Тогда существует число $\sigma_0 > 0$ такое, что для всех $\sigma \geq \sigma_0$ и $f \in L_{2,a}(R^n)$ задача (13), (14) имеет единственное решение $u_{\sigma} \in H^{2m}(B_{\sigma, \mu})$ выполняются неравенства

$$\|u - u_\sigma\|_{H^{2m}(K)} \leq \frac{c_3(K)}{\sigma^{|\mu|-2}} \|f\|_{L^{2,a}(R^n)}.$$

$$\|u - u_\sigma\|_{H^m(B_{d\sigma\mu})} \leq \frac{c_4}{\sigma^{[(|\mu|)/2]-1}} \|f\|_{L^{2,a}(R^n)}.$$

Теорема 4. Пусть $P(D)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, а $Q(x, D)$ - вышеперечисленным условиям, $\lambda \in \Delta_0 \setminus \Delta_1$ - фиксированное число. Тогда существует число $\sigma_0 > 0$ такое, что для всех $\sigma \geq \sigma_0$ и $f \in L^{2,a}(R^n)$ задача (13), (14) имеет единственное решение $u_\sigma \in H^{2m}(B_{\sigma,\mu})$ и для любого компакта $K \subset R^n$

$$\|u - u_\sigma\|_{H^{2m}(K)} \leq \frac{c_3'(K)}{\sigma^{[(|\mu|)/2]-2-d_1}} \|f\|_{L^{2,a}(R^n)}.$$

Ереванский государственный университет

Литература

1. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.; Мир, 1965.
2. Даллакян Г.В. - Уч. зап. ЕГУ. 2000. № 1
3. Simon L.. - Ann.sectio math. 1984. № 16. P. 241-256.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения., - М.: Наука 1975.
5. Мосолов П.П., - Мат. сборник. 1961: Т.55(97). № 13. С. 307-328
6. Карапетян Г.А., Даллакян Г.В. - Изв. НАН Армении. Математика. 1999. Т. 35. № 5 С.

Գ. Վ. Դավաթյան

**R_n - ում տրված կիսաէլիպտիկ հավասարման լուծումների մոտարկումը մեծ
շառավիղով ընդհանրացված գնդի վրա դրված եզրային խնդիրների
լուծումներով**

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է

$$P(D)u + Q(x, D)u = f, \quad x \in R^n$$

կիսաէլիպտիկ հավասարումը, որտեղ $P(D) = \sum_{|\mu| \leq 2} \gamma_\mu D^\mu$ - ն որոշակի դասի հաստատուն գործակիցներով (2μ - կարգի) գծային դիֆերենցիալ օպերատոր է, իսկ $Q(x, D)$ - ն՝ ողորկ փոփոխական գործակիցներով 2 - ը չգերազանցող μ - կարգի գծային դիֆերենցիալ օպերատոր է, որի գործակիցները $B_{\sigma, \mu} = \{x \in R^n; |x|_\mu < \sigma\}$ ընդհանրացված գնդից դուրս 0 են դառնում: Ապացուցվում է, որ այդ հավասարման լուծումը կարող է ստացվել որպես $B_{\sigma, \mu}$ -ի վրա դրված $P(D)u_\sigma = f, D_j^\nu u_\sigma|_{S_{\sigma, \mu}} = 0, \quad j=1, \dots, n, \nu=0, 1, \dots, m_j-1$ եզրային խնդրի u_σ լուծման սահման, երբ $\sigma \rightarrow \infty$: