

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

С. Г. Саакян, И. А. Варданян

**Фундаментальное решение антиплоской задачи для
вертикально-неоднородной упругой среды**

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 2/IX 1999)

Задача определения вектора перемещения в однородном изотропном упругом пространстве при наличии приложенного в некоторой точке среды сосредоточенного импульса массовых сил была решена Стоксом. В однородной анизотропной упругой среде фундаментальное решение плоской задачи получено в ⁽¹⁾ методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье с приведением решения к форме Смирнова-Соболева. В работе ⁽²⁾ решена задача определения вектора перемещения в однородном упругом пространстве, возбужденном движущимся в среде сосредоточенным импульсом массовых сил. Точное решение в виде эффективных аналитических формул получено методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье, вследствие обращения изображений формального решения методом Каньяра-Де Хупа. Метод интегральных преобразований применен в ^(3,4) для получения фундаментального решения некоторых вертикально-неоднородных упругих сред, допускающих разделение векторного уравнения теории упругости на систему независимых скалярных уравнений для обобщенных потенциалов. Решение антиплоской задачи для однородного упругого полупространства с однородным слоем получено в ⁽⁵⁾.

В настоящей работе для некоторых вертикально-неоднородных упругих сред получены фундаментальные решения антиплоской задачи.

1. *Экспоненциально неоднородная упругая среда.* Пусть в неоднородном упругом пространстве, механические свойства которого заданы в декартовой системе x, y, z функциями

$$\mu = \mu_0 \exp\left(\frac{2}{h} z\right), \quad \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{2}{h} z\right), \quad \xi = 3\mu \quad (1.1)$$

и которое находится в покое при $t < 0$, в момент $t = 0$ действует сосредоточенная на оси z импульсная сила $I\delta(x)\delta(z-z_0)\delta(t)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

В (1.1) постоянная h является характерным расстоянием для экспоненциально-неоднородной упругой среды; μ_0, ρ_0 — модуль сдвига и плотность среды при $z = 0$.

В случае антиплоской деформации имеем вектор перемещений $\vec{u}\{0, 0, w(x, z, t)\}$, и векторное уравнение Ламе теории упругости ⁽⁶⁾ приводится к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{h} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu_0} \exp\left(-\frac{2z}{h}\right) \delta(x) \delta(z-z_0) \delta(t). \quad (1.2)$$

В этом случае отличными от нуля будут компоненты напряжения σ_{xz} и σ_{yz} , причем

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Применив к уравнению (1.2) преобразование Лапласа по t

$$W_L(x, z, s) = \int_0^\infty w(x, z, t) e^{-st} dt, \quad (1.4)$$

а затем преобразование Фурье по x

$$W_{LF}(\alpha, z, s) = \int_{-\infty}^\infty W_L(x, z, s) e^{-i\alpha x} dx, \quad (1.5)$$

получим

$$\frac{d^2 W_{LF}}{dz^2} + \frac{2}{h} \frac{dW_{LF}}{dz} - n^2 W_{LF} = \frac{1}{\mu_0} \exp\left(-\frac{2z}{h}\right) \delta(z-z_0), \quad (1.6)$$

где

$$n^2 = \alpha^2 + s^2 / c_2^2.$$

Ветвь радикала n определена условием $\arg n = 0$ при $\alpha > 0$ и $s > 0$.

Уравнение (1.6) имеет фундаментальную систему решений

$$W_{LF}^{(1)} = \exp[-z(a-m)], \quad W_{LF}^{(2)} = \exp[-z(a+m)], \quad (1.7)$$

где

$$a = h^{-1}, \quad m = \sqrt{\alpha^2 + \frac{s^2}{c_2^2} + a^2}. \quad (1.8)$$

Очевидно, что фундаментальное решение, т.е. функция Грина, при граничных условиях

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} W_{LF}(\alpha, z, s) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} W_{LF}(\alpha, z, s) = 0 \quad (1.9)$$

существует. Используя фундаментальную систему решений и граничные условия (1.9), получим

$$W_{LF}(\alpha, z, s) = -\frac{I}{2\mu_0 m} \exp[-a(z + z_0)] \exp[-|z - z_0|m] \quad (1.10)$$

Применим к полученному решению в образах (1.10) обратное преобразование Фурье по α и представим его в виде

$$W_L(x, z, s) = -\frac{I}{2\pi\mu_0} \exp[-a(z + z_0)] \int_0^\infty \frac{\exp[-|z - z_0|m]}{m} \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (1.11)$$

Интеграл по α в (1.11) представляет собой косинус-преобразование Фурье и известен ((7), с.26)

$$\int_0^\infty \frac{\exp[-\beta\sqrt{\alpha^2 + b^2}]}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \cos(x\alpha) d\alpha = K_0\left[b\sqrt{\beta^2 + x^2}\right], \quad (1.12)$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя; предполагается, что в (1.12) $\operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $x > 0$.

Воспользовавшись формулой (1.12), запишем выражение (1.11) в виде

$$W_L(x, z, s) = -\frac{I}{2\pi\mu_0} \exp[-a(z + z_0)] K_0\left[\sqrt{\frac{s^2}{c_2^2} + a^2} \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}\right]. \quad (1.13)$$

Обратное преобразование Лапласа по s изображения (1.13) находим, пользуясь результатом ((7), с.250)

$$w(x, z, t) = -\frac{I}{2\pi\rho_0} \exp[-a(z + z_0)] \frac{H\left[c_2^2 t^2 - x^2 - (z - z_0)^2\right]}{\sqrt{c_2^2 t^2 - x^2 - (z - z_0)^2}} \times \\ \times \cos\left[a\sqrt{c_2^2 t^2 - x^2 - (z - z_0)^2}\right], \quad (1.14)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда.

Отметим, что если в выражении (1.14) положим $a = 0 (h \rightarrow \infty)$, то получим известное фундаментальное решение задачи о распространении волн от точечного источника в однородном упругом пространстве для антиплоской задачи (8).

Выражения для напряжений σ_{xz} и σ_{yz} получим, подставив в (1.3) найденное значение перемещений (1.14).

2. *Квадратично-неоднородная упругая среда.* Приводим решение задачи о возбуждении волн в квадратично-неоднородном упругом полупространстве источником массовых сил $I\delta(x)\delta(z - z_0)\delta(t)$, сосредоточенных на оси y . Примем, что коэффициенты μ, ξ и плотность ρ среды заданы функциями

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{z}{h} \right)^2, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{z}{h} \right)^2, \quad \xi = 3\mu, \quad (2.1)$$

где h — характерное расстояние для квадратично-неоднородной упругой среды, при котором модуль сдвига μ и плотность среды ρ принимают значения μ_0 и ρ_0 соответственно.

Найдем решение $\bar{u}\{0,0,w(x,z,t)\}$ векторного уравнения Ламе ⁽⁶⁾ в области $z > 0$ при начальных и граничных условиях

$$w(x,z,0) = w_t(x,z,0) = 0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} w(x,z,t) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} w(x,z,t) = 0. \quad (2.3)$$

Векторное уравнение Ламе ⁽⁶⁾ для квадратично-неоднородной среды в антиплоской задаче будет

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Ih}{\mu_0 z} \delta(x) \delta(z - z_0) \delta(t). \quad (2.4)$$

Представим решение уравнения (2.4) в виде

$$w(x,z,t) = \frac{1}{z} W(x,z,t), \quad (2.5)$$

тогда получим для $W(x,z,t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{Ih}{\mu_0} \delta(x) \delta(z - z_0) \delta(t) \quad (2.6)$$

при нулевом начальном и граничном условиях.

Решение поставленной задачи находим методом интегральных преобразований. Применив к (2.6) преобразования (1.4) и (1.5), получим

$$\frac{\partial^2 W_{LF}}{\partial z^2} - n^2 W_{LF} = \frac{Ih}{\mu_0} \delta(z - z_0). \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) имеет фундаментальную систему решений

$$W_{LF}^{(1)} = \exp(-zn), \quad W_{LF}^{(2)} = sh(zn). \quad (2.8)$$

Постоянные A и B в фундаментальном решении

$$W_{LF}(\alpha, z, s) = \begin{cases} A sh(zn) & 0 < z < z_0 \\ B \exp(-zn) & z_0 < z < +\infty \end{cases} \quad (2.9)$$

определяются из условий, что $W_{LF}(\alpha, z_0 + 0, s) = W_{LF}(\alpha, z_0 - 0, s)$ и $W_{LF}(\alpha, z, s)$ при $z \rightarrow z_0$ имеет особенность типа дельта-функции. Фундаментальное решение в образах будет

$$W_{LF}(\alpha, z, s) = \frac{Ih}{2\mu_0 n} \left\{ \exp[-|z - z_0|n] - \exp[|z + z_0|n] \right\} \quad (2.10)$$

После обращения преобразования Фурье получим ((⁷), с.26)

$$W_L(x, z, s) = -\frac{Ih}{2\mu_0 n} \left\{ K_0 \left[\frac{s}{c_2} \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2} \right] - \right. \\ \left. - K_0 \left[\frac{s}{c_2} \sqrt{x^2 + (z + z_0)^2} \right] \right\}. \quad (2.11)$$

Отсюда обратное преобразование Лапласа (2.11) с учетом (2.5) дает ((⁷), с.245)

$$w(x, z, t) = -\frac{Ih}{2\pi\rho_0 z} \left\{ \frac{H[c_2^2 t^2 - x^2 - (z - z_0)^2]}{\sqrt{c_2^2 t^2 - x^2 - (z - z_0)^2}} - \right. \\ \left. - \frac{H[c_2^2 t^2 - x^2 - (z + z_0)^2]}{\sqrt{c_2^2 t^2 - x^2 - (z + z_0)^2}} \right\}. \quad (2.12)$$

Из фундаментального решения (2.12) видно, что в квадратично-неоднородном полупространстве распространяются два типа возмущения. Первое из них аналогично возмущению от точечного источника в однородной упругой среде и имеет амплитуду $A_1 = Ih(2\pi\rho_0 z R_1)^{-1}$, где R_1 — расстояние исследуемой точки от источника возмущений. Второе имеет амплитуду $A_2 = Ih(2\pi\rho_0 z R_2)^{-1}$, где R_2 — расстояние исследуемой точки от симметричной относительно плоской границы полу-пространства точки источника возмущений и связано с неоднородностью среды. Начиная с момента времени $t^* = z_0/c_2$ на плоской границе полупространства происходит полное отражение падающих волн, чем обусловлено второе слагаемое в (2.12).

Заметим, что в рассмотренных вертикально-неоднородных упругих средах вектор перемещения вблизи фронта сдвиговых волн имеет особенность порядка $-1/2$, характерную для однородной упругой среды.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Ի. Հ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

**Ուղղձիգ-անհամասեռ առածգական միջավայրի համար հակահարթ խնդրի
ֆունդամենտալ լուծումը**

Առածգականության տեսության հակահարթ խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը ստացվել է էքսպոնենցիալ և քառակուսային անհամասեռություն ունեցող միջավայրերի համար: Ֆունդամենտալ լուծումը գտնելու համար օգտագործվել է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը: Ֆունդամենտալ լուծման Լապլա-

սի ձևափոխության շրջումը հաջողվել է ստանալ Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխության շրջումից հետո՝ ներկայացնելով այն Ֆուրյեի կոսինուս ձևափոխության տեսքով:

Ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ անհամասեռությունը էական ազդեցություն ունի սահքի ալիքների տարածման վրա: Ստացված է նաև, որ էքսպոնենցիալ և քառակուսային ուղղաձիգ-անհամասեռ առաձգական միջավայրերում տեղափոխության վեկտորը ալիքի ճակատի մոտ ունի $-1/2$ կարգի եզակիություն, որը բնութագրական է համասեռ առաձգական միջավայրի համար:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А.Г.Багдоев, Изв. АН АрмССР. Механика, т.27, №2, с.13-23 (1974). ² С.Г.Саакян, Изв. АН АрмССР. Механика, т.30, №4, с.3-17 (1977). ³ Гук (J.P. Hook), Прикладная механика (Trans. ASME, ser. E, рус. пер.), т.29, №2, с.85-92 (1962). ⁴ С.Г.Саакян, Механика. Межвуз. сб. научн. трудов. Ереван, вып.7, с.98 -106 (1989). ⁵ М.Mitra, Bulletin of the Seismological Society of America v.53, №5, p.1031-1037 (1963). ⁶ Ф.М.Морс, Г.Фешбах, Методы теоретической физики, т.1, М., ИЛ, 1958. ⁷ Г.Бейтмен, А.Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, М., Наука, 1969. ⁸ Р.Курант, Уравнения с частными производными, М., Мир, 1964.