

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.1

Н. Г. Асрян, С. Г. Саакян

**Проникание тупого деформируемого конуса в несжимаемую
неоднородную жидкость**

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 28/IV 1999)

В ранних исследованиях, относящихся к прониканию тел в жидкость (¹ и др.), не учитывались возможные деформации, происходящие в теле. В настоящей статье рассматривается задача о проникании тупого конуса в несжимаемую вертикально-неоднородную жидкость с учетом того, что в теле происходят пластические деформации.

Пусть тупой конус с вертикальной скоростью v проникает в несжимаемую вертикально-неоднородную жидкость, занимающую нижнее полупространство. Начало координат O возьмем в точке соприкосновения вершины конуса со свободной поверхностью жидкости, ось Oz направим по свободной поверхности, ось z в глубь жидкости. Исходя из того, что конус тупой, граничные условия на поверхности конуса можно перенести на плоскость $z = 0$. Задача имеет осевую симметрию.

В линейной постановке задачи о проникании тупого конуса в вертикально-неоднородную жидкость для потенциала φ , связанного с давлением

P по формуле $P = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, где $\rho_0 = \rho_1(0)$ – плотность жидкости на ее горизонтальной поверхности $z = 0$, $\rho_1(z)$ – плотность вертикально-неоднородной жидкости, получается следующее уравнение (¹):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\rho_1'(z)}{\rho_1(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

При установлении граничных условий предполагается, что давление, действующее на тело, настолько велико, что вызовет в нем пластические деформации. При такой постановке задачи, т.е. учитывая деформируемость конуса, можно получить следующие граничные условия (²):

$$\text{при } z = 0 \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k_1 \varphi = v, & 0 < r < l(t) \\ \varphi = 0, & l(t) < r < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

где $k_1 = -\frac{\rho_9}{\rho_T \varepsilon}$, ε — толщина стенки конуса, ρ_T — плотность материала тела, $l(t)$ — закон движений точек пересечения поверхности конуса со свободной поверхностью жидкости.

Таким образом, решение задачи о проникании тупого деформируемого конуса в неоднородную несжимаемую жидкость в линейной постановке сводится к решению уравнения (1) при граничных условиях (2).

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\varphi = f(z) \cdot \Phi(r, z, t). \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в (1), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left(\frac{2f'}{f} - \frac{\rho_1'}{\rho_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{\rho_1' f'}{\rho_1 f} \right) \Phi = 0. \quad (4)$$

Плотность $\rho_1(z)$ и неизвестная функция $f(z)$ определяются из условий

$$\frac{2f'}{f} - \frac{\rho_1'}{\rho_1} = -k, \quad \frac{f''}{f} - \frac{\rho_1'}{\rho_1} \cdot \frac{f'}{f} = 0, \quad (5)$$

где k — произвольная постоянная.

Учитывая (5) и пользуясь граничными условиями (2), рассматриваемую задачу можно привести к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - k \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} + [k_1 + f'(0)] \Phi|_{z=0} = v, \quad 0 < r < l(t), \quad (7)$$

$$\Phi(r, 0, t) = 0, \quad l(t) < r < \infty, \text{ где принято } f(0) = 1.$$

Решение системы (5) методом исключения приводится к исследованию дифференциального уравнения первого порядка следующего вида:

$$\tilde{u}' - \tilde{u}^2 + \frac{k^2}{4} = 0, \text{ где } \tilde{u} = \frac{\rho_1'}{2\rho_1}:$$

$$1) \text{ при } k = 0 \quad \rho_1 = \rho_0 \frac{h^2}{(z-h)^2}, \text{ где } h = \frac{2\rho_0}{\rho_0}; \quad 2) \text{ при } k \neq 0, \quad \tilde{u} = \pm \frac{k}{2}$$

$$\rho_1 = \rho_0 \exp(\pm kz); \quad 3) \text{ при } k \neq 0, \quad \tilde{u} \neq \pm \frac{k}{2} \quad \rho_1 = \rho_0 \left(ch \frac{k}{2} z + \frac{\rho_0}{\rho_0 k} sh \frac{k}{2} z \right)^{-2}.$$

Для всех этих случаев функция $f(z)$ после использования (5) определится из соотношения $f(z) = \sqrt{\rho_1 / \rho_0} \exp(-kz)$.

Теперь нетрудно найти $f'(0)$, входящий в граничные условия (7)

$$f'(0) = \frac{\rho'_0}{2\rho_0} - k. \quad (8)$$

Таким образом, рассматриваемая задача в конечном счете приводится к решению уравнения (6) с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} + k_2 \Phi|_{z=0} = v, \quad 0 < r < l(t), \quad (9)$$

$$\Phi(r, 0, t) = 0, \quad l(t) < r < \infty, \quad (10)$$

где $k_2 = k_1 + \frac{\rho'_0}{2\rho_0} - k$.

Отсюда следует, что вид граничных условий (9), (10) одинаков для вышеуказанных случаев, различаются они друг от друга лишь значениями коэффициента k_2 .

Применяя метод разделения переменных, решение уравнения (6) запишем в виде (1)

$$\Phi = \int_0^\infty f_1(\lambda) J_0(\lambda r) \exp \left[\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\lambda^2 + \frac{k^2}{4}} \right) z \right] d\lambda, \quad (11)$$

где $J_n(\lambda r)$ — функция Бесселя от действительного аргумента, $f_1(\lambda)$ — неизвестная функция.

Из уравнения (11), учитывая граничные условия (9), (10), получим

$$\int_0^\infty f_1(\lambda) J_0(\lambda r) \left(k_3 - \sqrt{\lambda^2 + \frac{k^2}{4}} \right) d\lambda = v, \quad 0 < r < l(t), \quad (12)$$

$$\int_0^\infty f_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > l(t), \quad k_3 = \frac{k}{2} + k_2. \quad (13)$$

Введем обозначения $\rho = \frac{r}{l(t)}$, $u = \lambda l(t)$, $k_4 = kl(t)$, $k_5 = k_3 l(t)$.

Тогда (12) и (13) примут вид

$$\int_0^\infty G(u) f_2(u) J_0(\rho u) du = -v, \quad 0 < \rho < 1, \quad (14)$$

$$\int_0^\infty f_2(u) J_0(\rho u) du = 0, \quad \rho > 1, \quad (15)$$

где $f_2(u) = \frac{f_1(u)}{l^2(t)}$, $G(u) = \sqrt{u^2 + \frac{k_4^2}{4}} - k_5$.

Для определения неизвестной функции $f_2(u)$ имеем парные интегральные уравнения (14) и (15). Эти уравнения решаются по методу, предложенному Трантером (3).

Решение $f_2(u)$ ищется в виде

$$f_2(u) = u^{1-q} \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_{2m+q}(u), \quad (16)$$

где a_m — неизвестные коэффициенты, m — положительное целое число или нуль, q — действительное и положительное число.

Пользуясь (4), можно показать, что

$$\int_0^{\infty} u^{1-q} J_{2m+q}(u) J_0(\rho u) du = 0, \quad \text{при } \rho > 1. \quad (17)$$

Подставляя (16) в (15) и имея в виду (17), получим

$$\int_0^{\infty} u^{1-q} \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_{2m+q}(u) J_0(\rho u) du = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^{\infty} u^{1-q} J_{2m+q}(u) J_0(\rho u) du = 0 \quad \text{при } \rho > 1.$$

Итак, функция (16) удовлетворяет условию (15). Остается выбрать коэффициенты a_m таким образом, чтобы функция $f_2(u)$ удовлетворяла также граничному условию (14).

Подставляя (16) в (14), получим

$$\int_0^{\infty} G(u) u^{1-q} \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_{2m+q}(u) J_0(\rho u) du = -v, \quad 0 < \rho < 1. \quad (18)$$

Для определения коэффициентов a_m получается следующая бесконечная система уравнений:

$$a_0 + \sum_{m=0}^{\infty} L_{m,0} a_m = -\frac{v 2^{1-q}}{\Gamma(q)}, \quad a_s + \sum_{m=0}^{\infty} L_{m,s} a_m = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\Gamma(q)$ — гамма функция,

$$L_{m,n} = (4n + 2q) \int_0^{\infty} u^{-1} [u^{2(1-q)} G(u) - 1] J_{2m+q}(u) J_{2n+q}(u) du. \quad (19)$$

Решение этой системы находится методом итерации (3)

$$a_n = -\frac{v 2^{1-q}}{\Gamma(q)} (\delta_n - c_n + c'_n - c''_n + \dots), \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n > 0 \end{cases},$$

$$c_n = L_{0,n} \cdot c'_n = \sum_{m=0}^{\infty} L_{m,n} c'_m, \quad c''_n = \sum_{m=0}^{\infty} L_{m,n} c'_m \quad \text{и т.д.}$$

Следуя (1), для нашего случая выражение L_{mn} можно записать в виде

$$L_{m,n} = (4n+3) \left[\frac{k_4^2}{4} - \int_0^{u_0} u^{-2} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{k_4^2}{4}} + u} - \frac{1}{2u} \right) J_{2m+\frac{3}{2}}(u) J_{2n+\frac{3}{2}}(u) du + \right. \\ \left. + \frac{k_4^2}{8} \int_0^{\infty} u^{-3} J_{2m+\frac{3}{2}}(u) J_{2n+\frac{3}{2}}(u) du - k_5 \int_0^{\infty} u^{-2} J_{2m+\frac{3}{2}}(u) J_{2n+\frac{3}{2}}(u) du \right]. \quad (20)$$

Или, пользуясь (4) и вычисляя несобственные интегралы, входящие в (20), получим

$$L_{m,n} = (4n+3) \left[\frac{k_4^2}{4} \int_0^{u_0} u^{-2} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{k_4^2}{4}} + u} - \frac{1}{2u} \right) J_{2m+\frac{3}{2}}(u) J_{2n+\frac{3}{2}}(u) du + \right. \\ \left. + \frac{k_4^2}{32} \frac{1}{\left(m+n+\frac{5}{2}\right) \left(m+n+\frac{3}{2}\right) \left(m+n+\frac{1}{2}\right) \Gamma(n-m+2) \Gamma(m-n+2)} - \right. \\ \left. - \frac{k_5}{4} \frac{1}{(m+n+2)(m+n+1) \Gamma\left(n-m+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m-n+\frac{3}{2}\right)} \right]. \quad (21)$$

Интеграл, входящий в (21), следует вычислить численным способом. Значение функции Φ на смоченной части конуса будет

$$\Phi(r,0,t) = l(t) \int_0^{\infty} f_2(u) J_0(\rho u) du = l(t) \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} J_{2m+\frac{3}{2}}(u) J_0(\rho u) du = \\ = \frac{l(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{3}{2})} \cdot F\left(m+1; -m-\frac{1}{2}; 1; \rho^2\right), \quad 0 < \rho < 1,$$

где $F\left(m+1; -m-\frac{1}{2}; 1; \rho^2\right)$ — гипергеометрический ряд.

Давление жидкости, действующее непосредственно на конус, будет

$$P|_{z=0} = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\rho_0 \frac{l(t)}{l(t)} \left[\Phi(r, 0, t) - r \int_0^{\infty} u f_2(u) J_1(\rho u) du \right], \quad 0 < \rho < 1.$$

Как и в (1), где рассмотрена более частная задача для экспоненциальной неоднородности и твердого конуса, можно показать, что в точках пересечения конуса со свободной поверхностью жидкости давление P имеет особенность порядка $1/2$.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ն. Գ. ԱՍՐՅԱՆ, Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ձևափոխվող բուր Կոնի ներթափանցումը անսեղմելի անհամասեռ հեղուկի մեջ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է անհամասեռ հեղուկի մեջ բուր Կոնական մարմնի ներթափանցման խնդիրը, երբ նրանում տեղի են ունենում պլաստիկ ձևափոխություններ: Առանցքասիւնետրիկ խնդիրը դիտարկվում է որոշակի դասի ուղղաձիգ-անհամասեռությունների համար: Պոտենցիալային ֆունկցիայի ներմուծման միջոցով խնդիրը բերվում է խառը եզրային պայմաններով երկրորդ կարգի էլիպտական տիպի մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը, որը իր հերթին հանգեցվում է գույգ ինտեգրալ հավասարումների համակարգին: Այդ համակարգի լուծումը ստացվում է Տրանտերի եղանակի օգնությամբ:

Պոտենցիալային ֆունկցիայի միջոցով ստացվել է ճնշման բաշխումը Կոնական մարմնի ներթափանցված մասի վրա: Ցույց է տրված, որ Կոնական մարմնի և հեղուկի հորիզոնական մակերևույթների հատման եզրագծում հեղուկի ճնշումը ունի $1/2$ կարգի եզակիություն:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э.М.Нерсисян, Некоторые задачи о воздействии твердых тел на жидкое полупространство. Канд. дис. Ереван, 1964. ² Н.Г.Асрян, Л.А.Галин, Изв. АН СССР, МЖГ, вып.6, с.5-10, 1972. ³ С.І.Трантер, The Quarterly Jornal of Mechanics and Applied Mathematics, v.7. p.317-325 (1954). ⁴ И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, М., Наука, 1962. ⁵ А.Г.Багдоев, Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1961.