ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик НАН Армении Л. А. Агаловян, Л. М. Халатян

Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях

(Представлено 21/IV 1999)

Вопросы определения частот собственных колебаний изотропных и анизотропных полос и пластин асимптотическим методом рассмотрены в (1-6). Представляет большой интерес рассмотрение вопросов о вынужденных колебаниях, которые являются основополагающими, в частности, для фундаментостроения и сейсмостойкого строительства (7,8). В работе рассматриваются вынужденные колебания ортотропной полосы при различных граничных условиях динамической теории упругости. Определены амплитуды вынужденных колебаний, установлены условия отсутствия резонанса.

Рассмотрим вынужденные колебания ортотропной полосы $D=\{x,y: x\in[0,l],\ |y|\le h,\ h<<l\}$, вызванные перемещениями, сообщаемыми нижней кромке полосы. Задача, в частности, моделирует колебания фундамента сооружения под сейсмическим воздействием. Требуется решить динамические уравнения плоской задачи ортотропного тела (9,10)

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}, \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy}$$

при следующих двух типах граничных условий

а) $$u(-h)=u_0^-(\xi)\exp(i\Omega t),\quad v(-h)=v_0^-(\xi)\exp(i\Omega t),$$
$$\sigma_{xy}(h)=0,\ \ \sigma_{yy}(h)=0,\quad \xi=x/l, \tag{1.2}$$

б) $u(-h)=u_0^-(\xi)\exp(i\Omega t),\quad v(-h)=v_0^-(\xi)\exp(i\Omega t),$

$$u(h)=0,\ v(h)=0,\quad \xi=x/l, \tag{1.3}$$

где a_{ik} – коэффициенты упругой податливости, ρ – плотность слоя, $u_0^-(\xi)$, $v_0^-(\xi)$ – компоненты вектора перемещения. Условиям при $x=0,l$ для данного класса задач соответствуют вынужденные колебания в зоне пограничного слоя, они требуют отдельного рассмотрения ([10,11]).

Решение системы (1.1) при условиях (1.2) будем искать в виде

$$\sigma_{xx}=\sigma_{11}(x,y)e^{i\Omega t},\ \sigma_{yy}=\sigma_{22}(x,y)e^{i\Omega t},\ \sigma_{xy}=\sigma_{12}(x,y)e^{i\Omega t},$$
$$u=u_1e^{i\Omega t},\ v=v_1e^{i\Omega t}, \tag{1.4}$$

Подставив (1.4) в (1.1), получим

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}=-\rho\Omega^2u_1,\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x}=-\rho\Omega^2v_1,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22},\quad \frac{\partial v_1}{\partial y}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}, \tag{1.5}$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=a_{66}\sigma_{12}.$$

В свою очередь, чтобы найти решение системы (1.5), перейдем к безразмерным переменным $\xi=x/l,\ \zeta=y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $U=u_1/l,\ V=v_1/l$. Решение вновь полученной системы будем искать в виде

$$\sigma_{11}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{11}^{(s)}(\xi,\zeta),\ \sigma_{12}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{12}^{(s)}(\xi,\zeta)\quad \sigma_{22}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{22}^{(s)}(\xi,\zeta),$$
$$U=\varepsilon^sU^{(s)},\ V=\varepsilon^sV^{(s)},\ s=\overline{0,N}. \tag{1.6}$$

Подставив (1.6) в преобразованную систему (1.5), для определения коэффициентов асимптотического разложения получим систему

$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\omega_*^2U^{(s)}=0,\ \frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\omega_*^2V^{(s)}=0,$$
$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22}^{(s)},\quad \frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22}^{(s)}, \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)},\qquad \omega_*^2=\rho h^2\Omega^2.$$

Из системы (1.7) все компоненты тензора напряжений можно выразить через $U^{(s)}$, $V^{(s)}$. Имеем формулы

$$\sigma_{11}^{(s)}=-\frac{a_{12}}{A_{21}}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{a_{22}}{A_{21}}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi},$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{66}} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}, \tag{1.8}$$

$$\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{A_{11}} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{a_{12}}{A_{21}} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}.$$

Для определения же $U^{(s)}, V^{(s)}$ имеем

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}\omega_*^2 U^{(s)} = f_1^{(s-1)},$$
$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{11}\omega_*^2 V^{(s)} = f_2^{(s-1)}, \tag{1.9}$$

где

$$f_1^{(s-1)} = \left(\frac{A_{21} + A_{12}}{A_{21}}\right) \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{A_{22}}{A_{21}} \frac{\partial^2 U^{(s-2)}}{\partial \xi^2},$$
$$f_2^{(s-1)} = \left(\frac{A_{21} + A_{12}}{A_{66}}\right) \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{A_{21}}{A_{66}} \frac{\partial^2 V^{(s-2)}}{\partial \xi^2}, \tag{1.10}$$

$$A_{11} = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)/a_{11},\ A_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$
$$A_{12} = -a_{12}a_{66},\ A_{22} = a_{22}a_{66},\ A_{66} = a_{11}a_{66}. \tag{1.11}$$

При $s = 0$ правые части уравнений системы (1.9), тождественно равны нулю и уравнения становятся независимыми. При $s > 0$ они должны быть решены совместно. Решение системы (1.9) при $s = 0$ будем искать в виде

$$U^{(0)}(\xi,\zeta) = u_0(\xi)\bar{u}_0(\zeta),\quad V^{(0)}(\xi,\zeta) = v_0(\xi)\bar{v}_0(\zeta). \tag{1.12}$$

Подставив (1.12) в однородные уравнения (1.9), получим обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $\bar{u}_0(\zeta), \bar{v}_0(\zeta)$. Решениями этих уравнений будут

$$\bar{u}_0(\zeta) = c_1 \sin\omega_* \sqrt{a_{66}}\zeta + c_2 \cos\omega_* \sqrt{a_{66}}\zeta,$$
$$\bar{v}_0(\zeta) = c_3 \sin\omega_* \sqrt{A_{11}}\zeta + c_4 \cos\omega_* \sqrt{A_{11}}\zeta. \tag{1.13}$$

Используя (1.8), (1.13) имеем

$$\sigma_{12}^{(0)}(\zeta) = \frac{\omega_*}{\sqrt{a_{66}}}\left(c_1 \sin\omega_* \sqrt{a_{66}}\zeta - c_2 \cos\omega_* \sqrt{a_{66}}\zeta\right),$$
$$\sigma_{22}^{(0)}(\zeta) = \frac{\omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\left(c_3 \sin\omega_* \sqrt{A_{11}}\zeta - c_4 \cos\omega_* \sqrt{A_{11}}\zeta\right) \tag{1.14}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2), получим две раздельные системы относительно $C_1^{(0)}(\xi)=c_1u_0(\xi)$, $C_2^{(0)}(\xi)=c_2u_0(\xi)$, $C_3^{(0)}(\xi)=c_3v_0(\xi)$, $C_4^{(0)}(\xi)=c_4v_0(\xi)$, решив которые, получим

$$
\begin{aligned}
C_1^{(0)}(\xi)&=\frac{1}{l\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}u_0^-(\xi)\sin\omega_*\sqrt{a_{66}},\\
C_2^{(0)}(\xi)&=\frac{1}{l\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}u_0^-(\xi)\cos\omega_*\sqrt{a_{66}},\\
C_3^{(0)}(\xi)&=\frac{1}{l\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}v_0^-(\xi)\sin\omega_*\sqrt{A_{11}},\\
C_4^{(0)}(\xi)&=\frac{1}{l\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}v_0^-(\xi)\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

В силу (1.15) решение будет конечным, если

$$\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}\neq 0,\quad \cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}\neq 0,$$

т.е

$$\omega_*\neq\frac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{a_{66}}}\quad \omega_*\neq\frac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{A_{11}}}. \tag{1.16}$$

Частоты (1.16) соответствуют частотам собственных колебаний ортотропной полосы ([1]) при однородных граничных условиях, соответствующих (1.2), т.е. при совпадении частоты Ω возмущающего воздействия с частотами собственных колебаний будет происходить резонанс. Чтобы избежать резонанса, необходимо так подобрать параметры полосы (основания, фундамента), чтобы выполнялись условия (1.16). Подставив (1.15) в (1.14), (1.13), (1.12), получим

$$U^{(0)}=\frac{1}{l\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}u_0^-(\xi)\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}(1-\zeta),$$

$$V^{(0)}=\frac{1}{l\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}v_0^-(\xi)\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}(1-\zeta),$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{12}^{(0)}&=\frac{\omega_*}{l\sqrt{a_{66}}\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}u_0^-(\xi)\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}(1-\zeta),\\
\sigma_{22}^{(0)}&=\frac{\omega_*}{l\sqrt{A_{11}}\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}v_0^-(\xi)\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}(1-\zeta).
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

2. При $s>0$ решением системы (1.9) является

$$U^{(s)}=U_0^{(s)}(\xi,\zeta)+U_\tau^{(s)},\quad V^{(s)}=V_0^{(s)}(\xi,\zeta)+V_\tau^{(s)}, \tag{2.1}$$

где $U_0^{(s)}$, $V_0^{(s)}$ – общие решения однородных, а $U_\tau^{(s)}$, $V_\tau^{(s)}$ – частные решения неоднородных уравнений (1.9). Решения однородных уравнений, как при $s=0$, будем искать в виде

$$U_0^{(s)}(\xi,\zeta)=u_0^{(s)}(\xi)\overline{u}_0^{(s)}(\zeta),\ V_0^{(s)}(\xi,\zeta)=v_0^{(s)}(\xi)\overline{v}_0^{(s)}(\zeta) \tag{2.2}$$

Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} U^{(s)}(\xi,\zeta)&=C_1^{(s)}(\xi)\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\zeta+C_2^{(s)}(\xi)\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}\zeta+U_\tau^{(s)}(\xi,\zeta),\\ V^{(s)}(\xi,\zeta)&=C_3^{(s)}(\xi)\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}\zeta+C_4^{(s)}(\xi)\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}\zeta+V_\tau^{(s)}(\xi,\zeta). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Согласно (1.8) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(s)}&=\frac{\omega_*}{\sqrt{a_{66}}}\left(C_1^{(s)}(\xi)\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}\zeta-C_2^{(s)}(\xi)\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\zeta\right)+\\ &\quad+\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U_\tau^{(s)}(\xi,\zeta)}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\\ \sigma_{22}^{(s)}&=\frac{\omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\left(C_3^{(s)}(\xi)\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}\zeta-C_4^{(s)}(\xi)\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}\zeta\right)+\\ &\quad+\left(\frac{1}{A_{11}}\frac{\partial V_\tau^{(s)}(\xi,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{a_{12}}{A_{21}}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Используя (2.3),(2.4), удовлетворив условиям (1.2), получим

$$\begin{aligned} C_1^{(s)}(\xi)&=\frac{1}{\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}\left(a_1^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}+a_2^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}\right),\\ C_2^{(s)}(\xi)&=\frac{1}{\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}\left(a_1^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}+a_2^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\right),\\ C_3^{(s)}(\xi)&=\frac{1}{\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}\left(b_1^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}+b_2^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}\right),\\ C_4^{(s)}(\xi)&=\frac{1}{\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}\left(b_1^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}+b_2^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$a_1^{(s)}=\frac{1}{l}u_0^{-(s)}(\xi)-U_\tau^{(s)}(\xi,-1),\ a_2^{(s)}=-\frac{1}{\omega_*\sqrt{a_{66}}}\left(\frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1},$$

$$b_1^{(s)}=\frac{1}{l}v_0^{-(s)}(\xi)-V_\tau^{(s)}(\xi,-1),\ b_2^{(s)}=-\frac{\sqrt{A_{11}}}{\omega_*}\left(\frac{1}{A_{11}}\frac{\partial V_\tau^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{a_{12}}{A_{21}}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1}, \tag{2.6}$$

$$u_0^{-(0)}=u_0^-(\xi),\ v_0^{-(0)}=v_0^-(\xi),\ u_0^{-(s)}=v_0^{-(s)}=0,\ s>0$$

Подставив эти значения $C_i^{(s)}(\xi)$ в (2.3),(2.4), найдем решение для приближения s.

$$U^{(s)}=\frac{1}{\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}\left[a_1^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}\,(1-\zeta)+a_2^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\,(1+\zeta)\right]+U_\tau^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$V^{(s)}=\frac{1}{\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}\left[b_1^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}\,(1-\zeta)+b_2^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}\,(1+\zeta)\right]+V_\tau^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\omega_*\sqrt{a_{66}}}{\cos 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}\left[a_1^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\,(1-\zeta)+a_2^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}\,(1+\zeta)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial U_\tau^{(s)}(\xi,\zeta)}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right], \tag{2.7}$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=\frac{\omega_*}{\sqrt{A_{11}}\cos 2\omega_*\sqrt{A_{11}}}\left[b_1^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}\,(1-\zeta)+b_2^{(s)}\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}\,(1+\zeta)\right]+$$

$$+\frac{1}{A_{11}}\frac{\partial V_\tau^{(s)}(\xi,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{a_{12}}{A_{21}}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}.$$

Подставив (2.7) в (1.6), (1.4), найдем окончательное решение поставленной задачи.

3. Удовлетворим граничным условиям (1.3). Используя (2.2), (2.3), (2.4), снова получим две раздельные системы относительно $C_1^{(s)}(\xi)$, $C_2^{(s)}(\xi)$, $C_3^{(s)}(\xi)$, $C_4^{(s)}(\xi)$, решив которые, получим

$$C_1^{(s)}(\xi)=\frac{a_2^{(s)}-a_1^{(s)}}{2\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}},\quad C_2^{(s)}(\xi)=\frac{a_1^{(s)}+a_2^{(s)}}{2\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}},$$
$$C_3^{(s)}(\xi)=\frac{b_2^{(s)}-b_1^{(s)}}{2\sin\omega_*\sqrt{A_{11}}},\quad C_4^{(s)}(\xi)=\frac{b_1^{(s)}+b_2^{(s)}}{2\cos\omega_*\sqrt{A_{11}}}, \tag{3.1}$$

где

$$a_1^{(s)}=\frac{1}{l}u_0^{-(s)}(\xi)-U_\tau^{(s)}(\xi,-1),\quad a_2^{(s)}=-U_\tau^{(s)}(\xi,1),$$
$$b_1^{(s)}=\frac{1}{l}v_0^{-(s)}(\xi)-V_\tau^{(s)}(\xi,-1),\quad b_2^{(s)}=-V_\tau^{(s)}(\xi,1), \tag{3.2}$$

Решением задачи для произвольного s будет

$$U^{(s)}=\frac{1}{\sin 2\omega_*\sqrt{a_{66}}}\left[a_1^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\,(1-\zeta)+\right.$$
$$\left.+a_2^{(s)}\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\,(1+\zeta)\right]+U_\tau^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$
\begin{aligned}
V^{(s)} = \frac{1}{\sin 2\omega .\sqrt{A_{11}}}\Big[& b_1^{(s)} \sin \omega .\sqrt{A_{11}}(1-\zeta)+ \\
& + b_2^{(s)} \sin \omega .\sqrt{A_{11}}(1+\zeta)\Big]+V_\tau^{(s)}(\xi,\zeta).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Подставив (3.3) в (1.4), (1.6), получим окончательное решение.

Институт механики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս **Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Լ. Մ. ԽԱԼԱԹՅԱՆ**

Օրթոտրոպ շերտի ստիպողական տատանումների ասիմպտոտիկան խառը եզրային պայմանների դեպքում

Ուսումնասիրվում են օրթոտրոպ շերտի ստիպողական տատանումները առաձգականության դինամիկական տեսության տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Դիտարկված խնդիրները, մասնավորապես, մոդելավորում են սեյսմիկ ազդեցությունները կառուցվածքների հիմքերի և հիմնատակերի վրա և կարևորվում են սեյսմակայուն շինարարության պահանջների տեսանկյունից:

Ստացված են դիտարկված խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծումները, որոշված են ստիպողական տատանումների ամպլիտուդները:

Ցույց է տրված, որ երբ արտաքին ազդեցության հաճախությունը համընկնում է շերտի սեփական տատանման հաճախության հետ, տեղի է ունենում ռեզոնանս: Նշվում են ռեզոնանսից զերծ մնալու պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л.А.Агаловян*, в сб.: Юбилейная науч. конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри. Изд. Высшая школа, 1994. [2] *Л.А.Агаловян, Л.С.Саркисян*, в сб.: Тр.18 Междунар. конф. по теории оболочек и пластин, РФ, Саратов, т.1, 1997. [3] *Л.С.Саркисян*, ДНАН Армении, т.97, №3, с.19-25 (1997). [4] *М.Л.Агаловян*, ДНАН Армении, т.96, №2-4, с.19-25 (1996). [5] *М.Л.Агаловян*, в сб.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем, Ереван, Изд. ЕГУ, 1997. [6] *Л.М.Халатян*, в сб.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем, Ереван, Изд. ЕГУ, 1997. [7] *В.З.Власов, Н.Н.Леонтьев*, Балки, плиты и оболочки на упругом основании, М., Физматгиз, 1960. [8] *В.Новацкий*, Динамика сооружений, М., Госстройиздат, 1963. [9] *С.Г.Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, М., Наука, 1977. [10] *Л.А.Агаловян*, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек, М., Наука, 1997. [11] *М.Л.*Агаловян, в сб.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем, Ереван, Изд. ЕГУ, 1997.