ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

Л. З. Геворкян

# Локальная оценка норм итераций элемента и уточнение неравенства Рида–Халмоша

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Захаряном 3/V 1999)

Пусть $A$ – оператор (ограниченный), действующий в банаховом пространстве $X$. Из определения нормы оператора

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

следует оценка

$$\|A^n x\| \le \|A^n\| \cdot \|x\|, \ n \in \mathbb{N},$$

которая в некоторых случаях оказывается грубой. Мы приведем ниже более точную оценку, учитывающую индивидуальные особенности элемента для специального, но достаточно обширного класса операторов. Заметим, что он охватывает, например, класс нормальных операторов в случае, когда $X$ – гильбертово пространство.

Определение 1. *Линейное преобразование $A$, действующее в банаховом пространстве $X$, с областью определения $D(A)$, называется паранормальным, если для любого $x \in D(A^2)$ имеет место неравенство*

$$\|Ax\|^2 \le \|A^2 x\| \cdot \|x\|. \tag{1}$$

Нетрудно заметить, что для $x \in \bigcap_{n\in Z^+} D(A^n)$ отсюда следует

$$\|A^n x\|^2 = \|AA^{n-1}x\|^2 \le \|A^{n+1}x\| \cdot \|A^{n-1}x\|. \tag{2}$$

Пример 1. Пусть $M$ оператор умножения на независимую переменную в пространстве Фишера $\mathcal{F}(\mathbb{C})$, состоящем из целых функций, удовлетворяющих условию

$$\iint |f(z)|^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy < \infty, \quad z = x + iy.$$

Воспользовавшись неравенством Шварца, нетрудно установить, что $M$ паранормален. Так как

$$\left\|z^n\right\|^2 = \frac{1}{\pi}\iint |z|^{2n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = n!,$$

то $M$ не может быть ограниченным. С другой стороны, ясно, что $\bigcap_{n\in Z^+} D(M^n)$ содержит множество всех полиномов, следовательно, оно всюду плотно в $\mathcal{F}(\mathbf{C})$.

Предложение 1. *Пусть преобразование $A$ паранормально. Тогда для любого $n \in N$*

$$\|x\| \cdot \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^n \le \left\|A^n x\right\| \le \|x\| \cdot \left(\lim_{k\to\infty} \left\|A^k x\right\|^{\frac{1}{k}}\right)^n . \tag{3}$$

Доказательство. Для краткости введем обозначение $s_n = \left\|A^n x\right\|$. Тогда условие (2) можно переписать в виде $s_n^2 \le s_{n+1} \cdot s_{n-1}$, т.е. частное $a_n = s_{n+1} / s_n$ монотонно возрастает и, следовательно, имеет предел (конечный или бесконечный). Известно (см., например ([1]), с.274), что

$$\lim \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim \sqrt[n]{s_n} .$$

Ввиду монотонности $a_n$

$$\lim \sqrt[n]{s_n} = \sup \frac{s_{n+1}}{s_n} .$$

Пользуясь методом математической индукции, нетрудно доказать справедливость следующего неравенства:

$$s_n \le s_{p+n}^{\frac{n}{p+n}} \cdot s_0^{\frac{p}{p+n}}, \; p, n \in N.$$

Устремляя $p$ к бесконечности при фиксированном $n$, получим правую часть неравенства (3). Оценка же снизу получается из вышеприведенного неравенства при $n = 1$, $p = m - 1$, т.е.

$$s_1^m \le s_m \cdot s_0^{m-1} .$$

Введем обозначение $r(x, A) = \lim \left\|A^k x\right\|^{\frac{1}{k}}$ и назовем это число спектральным радиусом элемента $x$ относительно оператора $A$. Рассмотрим множество

$$X(A, \varepsilon) = \{x \in X : \left\|A^n x\right\| \le \varepsilon^n \cdot \|x\| \; n \in N\},$$

где $\varepsilon$ — произвольное положительное число.

Определение 2. *Оператор $A$ называется эквипаранормальным, если оператор $A - \lambda I$ при любом $\lambda \in \mathbf{C}$ паранормален.*

Предложение 2. *Пусть оператор $A$ эквипаранормален. Тогда $X(A, \varepsilon)$ является замкнутым спектральным подпространством оператора $A$, связанным с кругом $\{\lambda : |\lambda| \le \varepsilon\}$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что условия $x \in X(A,\varepsilon)$ и $r(x,A) \le \varepsilon$ эквивалентны. Как показано в ([2]), из эквипаранормальности $A$ следует, что он удовлетворяет условиям спектральности (A) и (C) Данфорда, следовательно $X(A,\varepsilon)$ является замкнутым спектральным подпространством оператора $A$, связанным с кругом $\{\lambda : |\lambda| \le \varepsilon\}$. Доказанное выше утверждение известно для нормальных операторов (см., например ([3]), задача 153). В частности, $X(A,\varepsilon)$ является максимальным инвариантным относительно $A$ подпространством, где норма сужения $A|_{X(\alpha,\varepsilon)}$ оператора $A$ на $X(A,\varepsilon)$ не превосходит $\varepsilon$.

Пример 2. Пусть $m$ – пространство всех ограниченных последовательностей $\{\alpha_k\}_0^\infty$ с нормой $\sup_k|\alpha_k|$ и $A$ – оператор, определяемый последовательностью $\{a_k\} \in m$

$$A\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots\} = \{a_0\alpha_0, a_1\alpha_1,\ldots,a_k\alpha_k,\ldots\}.$$

Найдем спектральный радиус элемента $\{\alpha_k\}_0^\infty$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_k|a_k^n\alpha_k|\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sup_k|a_k|\cdot|\alpha_k|^{\frac{1}{n}} = \sup_{m,\alpha_m\neq 0}|\alpha_m|.$$

Таким образом, спектральное подпространство оператора $A$, связанное с кругом $\{\lambda : |\lambda| \le \varepsilon\}$, состоит из элементов, для которых $\alpha_j = 0$, если $|\alpha_j| > \varepsilon$.

Пример 3. Пусть $A$ – оператор (преобразование Стилтьеса), действующий в $L^2(0,\infty)$ по формуле

$$(Af)(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)dt}{x+t}.$$

Функции $f$, для которых

$$F(s) = \int_0^\infty t^{is-\frac{1}{2}} f(t)dt$$

равна нулю п.в. при $|s| < a$, принадлежат спектральному подпространству, связанному с кругом $\left\{\lambda : |\lambda| \le \frac{\pi}{ch 2\pi^2 a}\right\}$.

Взяв в неравенстве (3) $n = 1$, получим

$$\|Ax\| \le r(x,A)\cdot\|x\|. \tag{4}$$

Эта оценка содержательна лишь тогда, когда предел справа конечен. В случае, когда $A$ ограничен, имеем

$$r(x,A) \le r(A), \tag{5}$$

где $r(A)$ – спектральный радиус оператора $A$.

Заметим, что неравенство (4), вообще говоря, неверно для произвольного оператора. Действительно, если $V$ – вольтерровский оператор интегрирования, действующий в пространстве $L^2(0,1)$ по формуле

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

то $r(V) = 0$, следовательно, $r(f,V) = 0$ и неравенство (4) не может иметь места ни для одного элемента пространства $L^2(0,1)$, за исключением функции, тождественно равной нулю.

Укажем теперь одно применение неравенства (4). В.Рид доказал ([4]) следующее утверждение. Пусть $A$ – произвольный, а $G$ – неотрицательный операторы в гильбертовом пространстве такие, что $GA$ самосопряжен. Тогда

$$|(GAx,x)| \le \|A\| \cdot (Gx,x).$$

П.Халмош (([3]), Задача 82) улучшил этот результат, заменив $\|A\|$ на $r(A)$. Дальнейшее уточнение произведено в нашей работе ([5]). Здесь мы получим локальный вариант серии таких неравенств.

Самосопряженность произведения эквивалентна неравенству $A^*G = GA$. Введем обозначение $s_n = \|JA^n x\|$, где $J$ – неотрицательный квадратный корень из $G$.

Тогда

$$s_n^2 = \left(GA^n x, A^n x\right) = \left(A^* GA^{n-1} x, A^n x\right) =$$
$$= \left(JA^{n-1} x, JA^{n+1} x\right) \le \|JA^{n-1} x\| \cdot \|JA^{n+1} x\| = s_{n+1} \cdot s_{n-1}$$

Следовательно

$$|(GAx,x)| = \left(JAx, Jx\right) \le \|JAx\| \cdot \|Jx\| \le \left(Gx,x\right) \cdot \lim \|JA^n x\|^{\frac{1}{n}}.$$

Более простым (ввиду отсутствия оператора $J$), но и менее точным является неравенство

$$|(GAx,x)| \le \left(Gx,x\right) \cdot \underline{\lim} \|A^n x\|^{\frac{1}{n}}, \tag{6}$$

где $\underline{\lim}$ означает нижний предел.

Очевидно, что (6) является усилением не только неравенства Рида, но также и уточнения Халмоша.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что неравенство (6) сохраняет смысл также в случае неограниченного преобразования $A$, если только нижний предел существует.

Неравенства типа вышеуказанного имеют место также при немного более общих предположениях. Например, имеет место следующее

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть $A$ и $B$ – произвольные, а $G$ – неотрицательный операторы в гильбертовом пространстве и пусть $BG = GA$ и $BGB^{*} \le A^{*}GA$. Тогда*

$$\left|\left(GA^{n}x,x\right)\right| \le \left(Gx,x\right)\cdot\left(\lim_{r\to\infty}\left\|JA^{k}x\right\|^{\frac{1}{k}}\right)^{n},\ n\in\mathbf{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть снова $s_n = \left\|JA^{n}x\right\|$. Тогда

$$\left\|JB^{*}x\right\|^{2} = \left(GB^{*}x,B^{*}x\right) = \left(A^{*}Gx,B^{*}x\right) =$$

$$= \left(x,BGB^{*}x\right) \le \left(x,A^{*}GAx\right) = \left\|JAx\right\|^{2}$$

и

$$s_n^2 = \left(GA^{n}x,A^{n}x\right) = \left(BGA^{n-1}x,A^{n}x\right) =$$

$$= \left(JA^{n-1}x,JB^{*}A^{n}x\right) \le \left\|JA^{n-1}x\right\|\cdot\left\|JB^{*}A^{n}x\right\| \le s_{n+1}\cdot s_{n-1}.$$

Следовательно

$$\left|\left(GA^{n}x,x\right)\right| \le \left\|JA^{n}x\right\|\cdot\left\|Jx\right\| \le \left\|Jx\right\|^{2}\cdot\left(\lim_{k\to\infty}\left\|JA^{k}x\right\|^{\frac{1}{k}}\right)^{n} =$$

$$= \left(Gx,x\right)\cdot\left(\lim_{k\to\infty}\left\|JA^{k}x\right\|^{\frac{1}{k}}\right)^{n}.$$

З а м е ч а н и е 2. В условии Рида $B^{*} = A$, в другом случае, когда $G = I$, $B = A$ и оператор $A$ удовлетворяет условию $AA^{*} \le A^{*}A$, т.е. $A$ гипонормален. Само неравенство $BGB^{*} \le A^{*}GA$ выглядит довольно необозримым. Покажем, что равенство двух этих операторов может быть обеспечено простым алгебраическим условием коммутирования $A$ и $B^{*}$. Действительно, $BGB^{*} = GAB^{*} = GB^{*}A = A^{*}GA$.

Государственный инженерный университет Армении

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

### Տարրի պատկերների նորմերի լոկալ գնահատականը և Ռիդ-Հալմոշի անհավասարության ճշգրտումը

*Բանախի տարածությունում գործող օպերատորների որոշակի դասի համար ստացվել է տարրի հաջորդական պատկերների նորմերի երկկողմանի գնահատական, մասնավորապես վերևից՝ տարրի սպեկտրալ շառավղի ստիճանների և նրա նորմի արտադրյալով: Այն օգտագործվել է նորմալ օպերատորների սպեկտրալ ենթատարածությունների Հալմոշի հայտնի նկարագրությունը էկվիպարանորմալ օպերատորների վրա տարածելու համար: Որպես կիրառություն ստացվել է Հալմոշ-Ռիդի ճշգրտված անհավասարությունն էապես ավելի լայն դասի օպերատորների համար:*

## ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г.М.Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчислений, т.2 М., Наука, 1963. [2] *Л.З.Геворкян*, ДНАН Армении, т.97, №4, с.11-16 (1997). [3] *П.Халмош*, Гильбертово пространство в задачах, М., Мир, 1967. [4] *W.Reid*, Duke Math J., v.18, p.41-56 (1951). [5] *Л.З.Геворкян*, Изв. НАН Армении, Математика, т.29, №3, с.72-75 (1998).