ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.57 + 517.547

К. Л. Аветисян

О дробном интегрировании и интегральных представлениях в классах гармонических функций в круге

(Представлено академиком НАН Армении Н.У.Аракеляном 11/III 1999)

1. Пусть $\mathbf{D}$ – единичный круг комплексной плоскости, а $u(z)=u(re^{i\theta})$ комплекснозначная измеримая $\mathbf{D}$ функция. Положим

$$M_p(u;r)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|u\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}, & 0<p<\infty,\\ ess\sup_{-\pi<\theta<\pi}\left|u\left(re^{i\theta}\right)\right|, & q=\infty,\end{cases}\qquad 0\le r<1.$$

Через $h(p,q,\alpha)$ и $H(p,q,\alpha)$ $(0<p,\ q\le\infty,\ \alpha>0)$ обозначим пространства гармонических и, соответственно, голоморфных в $\mathbf{D}$ функций с конечной квазинормой

$$\|u\|_{p,q,\alpha}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^1(1-r)^{\alpha q-1}M_p^q(u;r)dr\right)^{1/q}, & 0<q<\infty,\\ \sup_{0\le r<1}(1-r)^{\alpha}M_p(u;r), & q=\infty.\end{cases}$$

Очевидно, что $H(p,q,\alpha)\subset h(p,q,\alpha)$. Дробное интегродифференцирование в классах $h(p,q,\alpha)$ и $H(p,q,\alpha)$ было впервые исследовано Харди, Литтлвудом и Пэли ([1-3]), а наиболее полно – М.Тейблсоном ([4]) и Т.Флеттом ([5,6]). Вопросы интегральных представлений в этих классах указанными авторами не изучались. В случае $p=q$ интегральные представления с плоскими интегралами по всему кругу были впервые получены М.М.Джрбашяном ([7,8]).

Введем в рассмотрение оператор дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля:

$$D^{-\alpha}u(re^{i\theta})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r(r-t)^{\alpha-1}u(te^{i\theta})dt=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\sigma)^{\alpha-1}u(\sigma z)d\sigma,$$

$$D^0u(z)=u(z),\quad D^{\alpha}u(z)=\frac{\partial^n}{\partial r^n}D^{-(n-\alpha)}u(z),\qquad z=re^{i\theta},$$

где $0<\alpha<\infty, n$ – целое, $n-1<\alpha<n$. Определим также операторы $\mathcal{D}^{-\beta}=r^{-\beta}D^{-\beta}$, $\mathcal{D}^{\beta}=D^{\beta}r^{\beta}$ $(\beta>0)$. Запись $T:A\to B$ будет означать, что оператор T ограниченно действует из A в B, т.е. $\|Tf\|_B\le C\|f\|_A$, $\forall f\in A$, где $C=\mathrm{const}$ – не зависящая от f постоянная.

Рассмотрим отображения

$$\mathcal{D}^{-\beta}:h(p,q,\alpha)\to X,$$

где наша задача будет состоять в описании классов X при различных значениях $\beta\in IR$. Наиболее полное решение этой задачи дано Т.Флеттом ([5]).

$$\mathcal{D}^{-\beta}:h(p,q,\alpha)\to h(p,q,\alpha-\beta),\quad \text{если } -\infty<\beta<\alpha,\ 0<p,q\le\infty, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta}:h(p,q,\alpha)\to h^{p},\quad \text{если } \beta=\alpha,\ 0<p<\infty,\ 0<q\le\min\{2,p\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta}:h(p,q,\alpha)\to h^{1/(\alpha+1/p-\beta)},\quad \text{если } \alpha<\beta<\alpha+1/p,$$

$$0<p<\infty,\ 0<q\le\frac{1}{\alpha+1/p-\beta}, \tag{3}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta}:h(p,q,\alpha)\to h^{\infty},\quad \text{если } \beta=\alpha+1/p,\ 0<p\le\infty,\ 0<q\le 1. \tag{4}$$

При этом соотношения (1)–(4) не верны при остальных значениях и $q>0$.

2. Для формулировки основных результатов настоящей заметки введем в рассмотрение ряд функциональных классов. Пусть $h(\mathbf{D})$ и $H(\mathbf{D})$ – множества всех (комплекснозначных) гармонических и голоморфных функций в $\mathbf{D}$; h^p, H^p – известные классы Харди. Через BMO обозначим пространство функций с ограниченной средней осцилляцией на единичной окружности: $\mathrm{BMOh}=h^2\cap\mathrm{BMO}$, $\mathrm{BMOA}=H^2\cap\mathrm{BMO}$ (см. ([9])). Хорошо известно, что $\mathrm{BMO}\subset L^p(\partial\mathbf{D})$, $0<p<\infty$. Будем рассматривать также функции из "плоского" BMO и писать BMOh (area), BMOA (area) (см. ([9])).

Через $\Lambda_{\alpha}^{p,q}(0<\alpha<2, 1\le p,q\le\infty)$ обозначим пространство О.В.Бесова, состоящее из тех измеримых функций $f(\theta)$, у которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda_{\alpha}^{p,q}}=\begin{cases}\|f\|_p+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{-1-\alpha q}\|f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta)\|_p^q\,dt\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \|f\|_p+\sup_{|t|>0}|t|^{-\alpha}\|f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta)\|_p, & q=\infty,\end{cases}$$

где $\|\cdot\|_p\equiv\|\cdot\|_{Lp}$. В случае произвольных $\alpha>0$ и $0<q\le\infty$ эта норма может быть заменена на

$$\|f\|_{\Lambda_{\alpha}^{p,q}}=\|\mathcal{D}^{\beta}u\|_{p,q,\beta-\alpha},$$

где $\beta>\alpha, u=u(re^{i\theta})$ – интеграл Пуассона функции $f(\theta)$. Положим $h\Lambda_{\alpha}^{p,q}=h(\mathbf{D})\cap\Lambda_{\alpha}^{p,q}$ и $H\Lambda_{\alpha}^{p,q}=H(\mathbf{D})\cap\Lambda_{\alpha}^{p,q}$.

3. Заметим, что результаты Т.Флетта (1)–(4) ([6]) не содержат случаи $\beta>\alpha+1/p$ и $\beta=\alpha+1/p, q>1$. Следующая теорема восполняет этот пробел.

Теорема 1. *Следующие соотношения верны для всех* q, $0<q\le\infty$:

$$\mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\to h^p, \qquad \text{при } \beta>\alpha,\ 1\le p\le\infty, \tag{5}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\to \mathrm{BMOh(area)}, \qquad \text{при } \beta=\alpha+1/p,\ p=\infty, \tag{6}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\to \mathrm{BMOh}, \qquad \text{при } \beta=\alpha+1/p,\ 0<p<\infty, \tag{7}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\to h\Lambda_{\beta-\alpha-1/p}^{\infty,\infty}, \qquad \text{при } \beta>\alpha+1/p,\ 0<p\le\infty. \tag{8}$$

Эти же соотношения справедливы для голоморфных подклассов. При $\beta=1$ и некоторых частных значениях $p=q>1$ и α работы ([10-12]). Теорема 1 позволяет получить интегральные представления классов $h(p,q,\alpha)$ и $H(p,q,\alpha)$, в которых интеграл, в отличие от ([7,8]), распространен по границе круга.

Теорема 2. *Пусть* $1\le p\le\infty, 0<q\le\infty, \alpha>0$. *Тогда*: .

1°. *Пространство* $H(p,q,\alpha)$ *совпадает с множеством функций* $g(z)$, *представимых в виде*

$$g(z)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2}{\left(1-e^{-it}z\right)^{\beta+1}}-1\right]\varphi_1(t)\,dt+iC, \qquad z\in\mathbf{D}, \tag{9}$$

или в виде

$$g(z)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mathrm{Re}\frac{2}{\left(1-e^{-it}z\right)^{\beta+1}}-1\right]\varphi_2(t)\,dt, \qquad z\in\mathbf{D}, \tag{10}$$

где $\beta>\alpha$, $\mathrm{Im}\,C=0$ – *произвольные числа,* $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ – *функции класса* $\Lambda_{\beta-\alpha}^{p,q}$, *причем* $\varphi_1(t)$ *вещественнозначна, а* $\varphi_2(t)$ *допускает голоморфное продолжение в* $\mathbf{D}$.

2°. *Если обозначить*

$$(T_\beta\varphi)(z)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mathrm{Re}\frac{2}{\left(1-e^{-it}z\right)^{\beta+1}}-1\right]\varphi(t)\,dt,$$

то пространство $h(p,q,\alpha)$ *совпадает с множеством функций* $u(z)$, *представимых в виде*

$$u(z)=(T_\beta\varphi_3)(z), \qquad z\in\mathbf{D}, \tag{11}$$

где $\beta>\alpha, \varphi_3(t)$ – *функции класса* $\Lambda_{\beta-\alpha}^{p,q}$.

3^o. *Оператор* $T_\beta(\beta>\alpha)$ *определяет изоморфизм класса* $\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$ *на* $h(p,q,\alpha)$, *а также класса* $H\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$ *на* $H(p,q,\alpha)$.

4^o. *Функции* φ_1, φ_2, φ_3 *из (9)–(11) могут быть определены следующими формулами обращения* ($\beta>\alpha$):

$$\varphi_1(\theta)=\lim_{r\to 1-}\mathcal{D}^{-\beta}\operatorname{Re}g(re^{i\theta}),\ \text{п. в.}\ \ \theta\in[-\pi,\pi],$$

$$\varphi_2(\theta)=\lim_{r\to 1-}\mathcal{D}^{-\beta}g(re^{i\theta}),\qquad \text{п. в.}\ \ \theta\in[-\pi,\pi],$$

$$\varphi_3(\theta)=\lim_{r\to 1-}\mathcal{D}^{-\beta}u(re^{i\theta}),\qquad \text{п. в.}\ \ \theta\in[-\pi,\pi].$$

Отметим, что при $p=q=1$ схожие представления для иных классов A^*_α Неванлинны–Джрбашяна были получены Ф.А.Шамояном ([13,14]). Классы $H(p,p,\alpha/p)$ совпадают с классами H^p_α, М.М.Джрбашяна ([7,8]). Так что соответствующие специальные случаи теорем 1 и 2 имеют место для классов H^p_α.

Представление (9) можно считать аналогом интегральной формулы Шварца, а представления (10) и (11) – аналогами формулы Пуассона для голоморфных и гармонических функций. Очевидно, что имеет место и аналог интегральной формулы Коши.

Следующее неравенство хорошо известно для голоморфных функций или для гармонических функций, принадлежащих более узким классам.

Лемма 1. *Если* $0<p,\ q\le\infty,\ \alpha>0$, *и* $u(z)\in h(p,q,\alpha)$, *то*

$$|u(z)|\le\frac{C\|u\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^{\alpha+1/p}},\quad z\in\mathbf{D},\tag{12}$$

где постоянная $C=C(p,q,\alpha)$ *не зависит от* u.

Неравенство (12) непосредственно следует из неравенств Гельдера и Харди-Литтлвуда для гармонических функций (см. например, ([9]), гл. III, лемму 3.7).

Из леммы 1 получается следующая

Лемма 2. *Если* $0<p,\ q\le\infty,\ \alpha>0$, *то*

$$h(p,q,\alpha)\subset h(p_0,q_0,\beta),\ \text{при}\ \beta>\alpha+1/p,\ 0<p_0,q_0\le\infty,\tag{13}$$

$$h(p,q,\alpha)\subset h(p,q_0,\beta),\ \text{при}\ \beta>\alpha,\ 0<q_0\le\infty.\tag{14}$$

Лемма 2 позволяет получить интегральные представления, аналогичные (9)–(11), в случае, когда $p<1$.

Ереванский государственный университет
Институт математики НАН Армении

Կ. Լ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Կոտորակային ինտեգրման և ինտեգրալ ներկայացումների մասին շրջանում հարմոնիկ ֆունկցիաների դասերում

Հոդվածում բացահայտված է, թե ինչպես է գործում Ռիման-Լիուվիլի կոտորակային ինտեգրման օպերատորը միավոր շրջանում հարմոնիկ կամ հոլոմորֆ ֆունկցիաների $h(p,q,\alpha)$, $H(p,q,\alpha)$ կշռային դասերում: Թեորեմ 1-ը լրացնում է այդ ասպարեզում Տ.Ֆլետտի (5,6) հայտնի արդյունքները: Մյուս կողմից, դրանց հիման վրա ստացված են հետազոտվող կշռային դասերի ինրեգրալ պարամետրական ներկայացումներ: Մասնավոր դեպքում, երբ $p=q$ և $\alpha=\beta/p$, դիտարկվող $H(p,q,\alpha)$ դասերը համընկնում են Մ.Մ.Ջրբաշյանի (7,8) H_β^p դասերի հետ, որոնք սահմանվում են

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-r)^{\beta-1}\left|f(re^{i\theta})\right|^p r dr d\theta<+\infty$$

պայմանով: Հետևաբար, բերված արդյունքները տեղի ունեն նաև H_β^p դասերի համար: Ի տարբերություն Մ.Մ.Ջրբաշյանի (7,8) ինտեգրալ ներկայացումների ստացված ներկայացումների մեջ ինտեգրալը տարածված է շրջանի եզրով, այլ ոչ թե շրջանով:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G.H.Hardy, J.E.Littlewood*, Math. Zeit, v.34, p.403-439 (1932). [2] *J.E.Littlewood, R.E.A.C.Paley*, Proc. London Math. Soc., v.(2) 42, p.52-89 (1936). [3] *G.H.Hardy, J.E.Littlewood*, Quart. J. Math. (Oxford), v.12, p.221-256 (1941). [4] *M.H.Taibleson*, J. Math. Mech., v.13, p.407-479 (1964). [5] *T.M.Flett*, J. Math. Anal. Appl., v.38, p.746-765 (1972). [6] *T.M.Flett*, J. Math. Anal. Appl., v.39, p.125-158 (1972). [7] *М.М.Джрбашян*, ДАН АрмССР, т.3, №1, с.3-9 (1945). [8] *М.М.Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып.2, с.3-40 (1948). [9] *J.B.Garnett*, Bounded Analytic Functions, Academic Press, N.Y., 1981. [10] *P.J.Eenigenburg*, Quart. J. Math. (Oxford), v.32, p.313-322 (1981). [11] *А.Забулёнис*, Литовск. мат. сб., т.24, №1, с.53-59 (1984). [12] *F.Holland, J.B.Twomey*, J. London Math. Soc., v.(2) 17, p.275-283 (1978). [13] *Ф.А.Шамоян*, ДАН АрмССР, т.90, №3, с.99-103 (1990). [14] *Ф.А.Шамоян*, Мат. заметки, т.52, №1, с.128-140 (1992).