

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

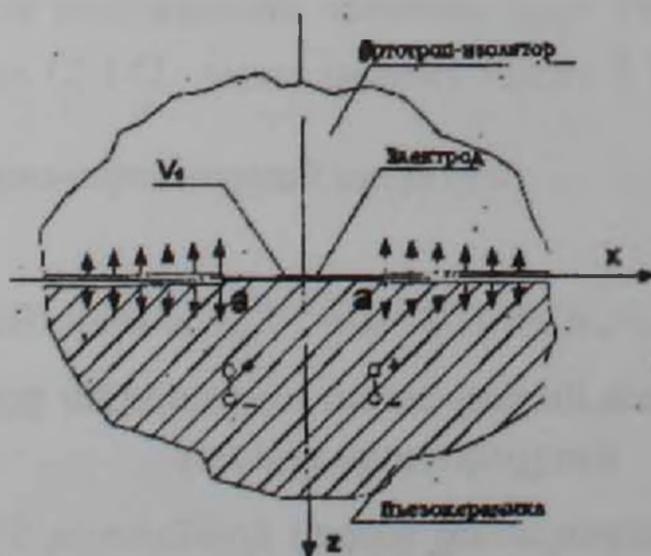
УДК 539.3.31

С. А. Мелкумян

Симметричная задача электроупругости для составной плоскости с полубесконечными разрезами, при наличии заряженного электрода

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Абрамяном 30/VI 1998)

Рассматривается симметричная плоская задача электроупругости для составной плоскости с полубесконечными разрезами ($|x| > a$). Плоскость состоит из двух полуплоскостей, одна из которых представляет собой предварительно поляризованную упругую пьезокерамику ($z \geq 0, (|x| < \infty)$), а другая – упругий ортотропный изолятор ($z \leq 0, (|x| < \infty)$), которые жестко сцепляются друг с другом в конечной зоне ($|x| < a$). Принимается, что в этой зоне плоскость электродирована заряженным тонким, гибким электродом и на берегах полубесконечных разрезов действуют симметричные внешние затухающие в бесконечности механические давления. Рассматривается плоское деформированное состояние $\left(U_y = 0, \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \right)$ (рисунок). Предполагается, что направление предварительной поляризации пьезокерамики перпендикулярно к линии сцепления полуплоскостей ($z = 0$) и совпадает с положительным направлением оси oz .



С использованием метода парных интегральных уравнений задача решена точно в замкнутом виде.

Для решения за основные неизвестные принимаем упругие перемещения $(U_x(x, z), U_z(x, z))$ и электростатический потенциал $(\Psi_r(x, z))$. Все величины, которые принадлежат пьезокерамической полуплоскости $(z \geq 0, (|x| < \infty))$, будем писать с индексом один, а для упругого ортотропного изолятора $(z \leq 0, (|x| < \infty))$ — с индексом два.

Отметим, что диэлектрическая проницаемость обычного (несегнетоэлектрического) диэлектрика в сотни раз меньше диэлектрической проницаемости пьезокерамики. Имея в виду симметричность задачи относительно оси oz , решение ее ищем в виде интегралов Фурье:

$$U_x^{(1)}(x, z) = \frac{1}{c_{11}^E} \int_0^\infty \alpha \bar{U}^{(1)}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha, \quad U_z^{(1)}(x, z) = \frac{1}{c_{44}^E} \int_0^\infty \alpha \bar{W}^{(1)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha,$$

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \alpha \bar{\Psi}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha, \quad (z \geq 0, x \geq 0) \quad (1)$$

$$U_x^{(2)}(x, z) = \frac{1}{A_{44}} \int_0^\infty \alpha \bar{U}^{(2)}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha, \quad (2)$$

$$U_z^{(2)}(x, z) = \frac{1}{A_{11}} \int_0^\infty \alpha \bar{W}^{(2)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha, \quad (z < 0, x > 0)$$

Затухающие в бесконечности неизвестных плотности интегралов Фурье (1), (2) представляются в виде:

$$\bar{U}_{(\alpha, z)}^{(1)} = \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z}, \quad \bar{W}_{(\alpha, z)}^{(1)} = \sum_{k=1}^3 \Delta_2(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z},$$

$$\bar{\Psi}_{(\alpha, z)} = \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z}, \quad \bar{W}_{(\alpha, z)}^{(2)} = \sum_{m=1}^2 \Delta_4(\xi_m) C_m(\alpha) e^{\alpha \xi_m z}. \quad (3)$$

$$\bar{W}_{(\alpha, z)}^{(2)} = \sum_{m=1}^2 \Delta_4(\xi_m) C_m(\alpha) e^{\alpha \xi_m z},$$

Определение $\Delta_1(t_k)$, $\Delta_2(t_k)$, $\Delta_3(t_k)$ и t_k дано в работе (1), $\Delta_4(\xi_m)$, $\Delta_5(\xi_m)$ и ξ_m — в (2). Пользуясь (1), (2), (3) и уравнением электроупругости в декартовых координатах (3), а также основными соотношениями теории упругости для ортотропного материала (4), можно все компоненты сопряженного электроупругого и упругого полей выразить соответственно через неизвестные функции интегрирования $A_k(\alpha)$ и $C_m(\alpha)$, которые нужно определить из граничных условий

$$\Psi(x, 0) = V_0 \quad (0 \leq x \leq a), \quad D_z(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty) \quad (4)$$

$$\sigma_z^{(1)}(x, 0) = \sigma_z^{(2)}(x, 0) = f(x), \quad \tau_{xz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xz}^{(2)}(x, 0) = 0, \quad (a < x < \infty) \quad (5)$$

и условия полного контакта полуплоскостей:

$$U_x^{(1)}(x, 0) = U_x^{(2)}(x, 0), \quad U_z^{(1)}(x, 0) = U_z^{(2)}(x, 0) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (6)$$

$$\sigma_z^{(1)}(x, 0) = \sigma_z^{(2)}(x, 0), \quad \tau_{xz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xz}^{(2)}(x, 0), \quad (0 < x < a). \quad (7)$$

Из (5) и (7) вытекают условия

$$\sigma_z^{(1)}(x, 0) = \sigma_z^{(2)}(x, 0), \quad \tau_{xz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xz}^{(2)}(x, 0), \quad (0 < x < \infty). \quad (8)$$

Удовлетворяя условию (8), получим

$$C_m(\alpha) = \sum_{k=1}^3 a_m^{(k)} A_k(\alpha) \quad (m = 1, 2), \quad (9)$$

где

$$\delta_0 a_1^{(k)} = b_{22} a_{1k} + b_{12} a_{2k}, \quad \delta_0 a_2^{(k)} = b_{21} a_{1k} + b_{11} a_{2k}, \quad \delta_0 = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}; \quad (10)$$

здесь

$$\begin{aligned} a_{1k} &= \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) t_k^2 + \Delta_2(t_k) - \Delta_3(t_k), \\ a_{2k} &= t_k \left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right], \\ b_{1m} &= \frac{\Delta_5(\xi_m)}{\xi_m} - \frac{A_{44}}{A_{11}} \Delta_4(\xi_m), \quad b_{2m} = \frac{\Delta_4(\xi_m)}{\xi_m} + \frac{A_{13}}{A_{44}} \Delta_5(\xi_m). \end{aligned} \quad (11)$$

Имея в виду (9), удовлетворяя условиям (4), (5) и (6), получаем систему из трех парных интегральных уравнений:

$$\left\{ \int_0^\infty \alpha \left[\sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) A_k(\alpha) \right] \cos \alpha x d\alpha = e_{15} V_0 \quad (0 \leq x \leq a) \right. \quad (12)$$

$$\left. \int_0^\infty \alpha^2 \left[\sum_{k=1}^3 a_{3k} A_k(\alpha) \right] \cos \alpha x d\alpha = 0 \quad (a < x < \infty) \right.$$

$$\left\{ \int_0^\infty \alpha \left[\sum_{k=1}^3 a_{4k} A_k(\alpha) \right] \cos \alpha x d\alpha = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \right. \quad (13)$$

$$\left. \int_0^\infty \alpha^2 \left[\sum_{k=1}^3 a_{2k} A_k(\alpha) \right] \cos \alpha x d\alpha = f(x) \quad (a < x < \infty) \right.$$

$$\left\{ \int_0^\infty \alpha \left[\sum_{k=1}^3 a_{5k} A_k(\alpha) \right] \sin \alpha x d\alpha = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \right. \quad (14)$$

$$\left. \int_0^\infty \alpha^2 \left[\sum_{k=1}^3 a_{1k} A_k(\alpha) \right] \sin \alpha x d\alpha = f(x) \quad (a < x < \infty), \right.$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{3k} &= t_k \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) - \frac{c_{11}^E \varepsilon_{33}^S}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_k) \right], \\
 a_{4k} &= \frac{1}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) - \frac{1}{A_{11}} \sum_{m=1}^2 \Delta_4(\xi_m) a_m^{(k)}, \\
 a_{5k} &= \frac{1}{c_{11}^E} t_k \Delta_1(t_k) - \frac{1}{A_{44}} \sum_{m=1}^2 \Delta_5(\xi_m) a_m^{(k)}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для решения системы (12)–(14) введем неизвестные функции касательных ($\tau_x^{(1)}(x, 0) = \tau_x^{(2)}(x, 0) = S(x)$), нормальных ($\sigma_z^{(1)}(x, 0) = \sigma_z^{(2)}(x, 0) = H(x)$) напряжений и нормальных составляющих вектора индукции электрического поля ($D_x(x, 0) = P(x)$) в зоне полного контакта (сцепления) квадрантов ($0 < x < \alpha$). После этого вторые уравнения (12)–(14) допускают обратное интегральное преобразование Фурье, из которого получаем

$$\begin{aligned}
 A_k(\alpha) &= -\frac{2}{\pi} \frac{P_{1k}}{\alpha^2} \int_0^a S(t) \sin \alpha t dt + \frac{2}{\pi} \frac{P_{2k}}{\alpha^2} \int_0^a H(t) \cos \alpha t dt + \\
 &+ \frac{2}{\pi} \frac{P_{3k}}{\alpha^2} \frac{c_{11}^E}{e_{15}} \int_0^a P(t) \cos \alpha t dt + \frac{2}{\pi} \frac{P_{2k}}{\alpha^2} \int_0^a f(t) \cos \alpha t dt.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь коэффициенты P_{jk} ($j = 1, 2, 3$) выражаются через коэффициенты a_{jk} ($j = 1, 2, 3, 4, 5$).

Подставив $A_k(\alpha)$ из (16) в первые уравнения (12)–(14), далее проинтегрировав по x и воспользовавшись известными соотношениями для обобщенной функции Дирака (5), получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 g_{11} S(x) + \frac{1}{\pi} g_{12} \int_0^a H(t) \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right] dt + \frac{1}{\pi} g_{13} \int_0^a P(t) \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right] dt &= f_1(x), \\
 g_{21} S(x) + \frac{1}{\pi} g_{22} \int_0^a H(t) \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right] dt + \frac{1}{\pi} g_{23} \int_0^a P(t) \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right] dt &= f_2(x), \\
 \frac{1}{\pi} g_{31} \int_0^a S(t) \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right] dt + g_{32} H(x) + g_{33} P(x) &= 0, \quad 0 < x < a,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где g_{jk} выражаются через a_{jk} и P_{jk} , а $f_1(x) = g_{12} F_1(x)$, $f_2(x) = g_{22} F_1(x)$. В свою очередь $F_1(x)$ выражаются через $f(x)$. Если продолжить $S(x)$ нечетно, $H(x)$ и $P(x)$ четно на интервале $-a < x < 0$, система (17) приводится к виду

$$\begin{aligned} g_{11}S(x) - \frac{1}{\pi} g_{12} \int_{-a}^a \frac{H(t)}{t-x} dt - \frac{1}{\pi} g_{13} \int_{-a}^a \frac{P(t)}{t-x} dt &= f_1(x), \\ g_{21}S(x) - \frac{1}{\pi} g_{22} \int_{-a}^a \frac{H(t)}{t-x} dt - \frac{1}{\pi} g_{23} \int_{-a}^a \frac{P(t)}{t-x} dt &= f_2(x), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{1}{\pi} g_{31} \int_{-a}^a \frac{S(t)}{x+t} dt + g_{32}H(x) + g_{33}P(x) = 0, \quad -a < x < a.$$

Из первого и второго уравнения (18) можно получить следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{H(t) - g^* P(t)}{t-x} dt = -F_1(x) \quad (-a < x < a). \quad (19)$$

Здесь $(g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21})g^* = g_{13}g_{21} - g_{23}g_{11}$. (20)

Из точного решения уравнений (19) получаем (6)

$$P(x) = \frac{1}{g^*} H(x) + \varphi(x), \quad (21)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\pi g^* \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - x} F_1(\tau) d\tau + \frac{1}{g^*} \frac{C_0}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. (22)

Постоянная C_0 определяется из условия $\int_{-a}^a D_z(x, 0) dx = Q_0$. (23)

Здесь Q_0 — электрический заряд электрода.

Подставляя (21) в третье уравнение (18), можно привести его к виду

$$\frac{1}{\pi} n_{11} \int_{-a}^a \frac{S(t)}{t-x} dt + n_{12}H(x) = \varphi(x), \quad -a < x < a, \quad (24)$$

а из первого и второго уравнения (18) получается следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$n_{21}S(x) - \frac{n_{22}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{H(t)}{t-x} dt = \varphi_2(x), \quad -a < x < a, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} n_{11} &= g_{31}g^*, \quad n_{12} = g_{32}g^* + g_{33}, \quad \varphi_1(x) = -g_{33}g^*\varphi(x), \\ n_{21} &= g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}, \quad n_{22} = -(g_{22}g_{13} - g_{12}g_{23}), \quad \varphi_2(x) = n_{22}F_1(x). \end{aligned} \quad (26)$$

Решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений (24), (25), которые можно привести к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\chi(x) + \frac{g}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\chi(t)}{t-x} dt = F(x), \quad -a < x < a. \quad (27)$$

Здесь

$$\chi(x) = H(x) + iS_1(x), \quad S_1(x) = g_1 S(x),$$

$$F(x) = \frac{1}{n_{12}} \varphi_1(x) + \frac{g_1}{n_{21}} \varphi_2(x), \quad g = \frac{n_{22}}{n_{12}} g_1, \quad g_1 = \sqrt{\frac{n_{11} n_{21}}{n_{12} n_{22}}}. \quad (28)$$

Получая решение (27) в замкнутом виде (7), разделяя вещественные и мнимые части, получаем (8):

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xz}^{(2)}(x, 0) = S(x) &= \frac{S_1(x)}{g_1} = k_{11} \varphi_2(x) + \frac{c}{g_1 \sqrt{a^2 - x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{k_{12}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_1(t) \cos \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{k_{12}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_1(t) \sin \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{k_{13}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_2(t) \cos \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \frac{k_{13}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_2(t) \sin \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt; \quad (-a < x < a) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{xz}^{(2)}(x, 0) = H(x) &= k_{21} \varphi_1(x) + \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{k_{22}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_1(t) \cos \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{k_{22}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_1(t) \sin \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \frac{k_{23}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_2(t) \cos \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \frac{k_{23}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} \varphi_2(t) \sin \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} dt; \quad (-a < x < a) \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$k_{11} = \frac{1}{1-g^2} \frac{1}{n_{21}}, \quad k_{21} = \frac{1}{1-g^2} \frac{g}{g_1} \frac{1}{n_{21}}, \quad k_{13} = g k_{11}, \quad k_{21} = \frac{1}{1-g^2} \frac{1}{n_{12}}, \quad (31)$$

$$k_{22} = g k_{21}, \quad k_{23} = \frac{1}{1-g^2} \frac{g}{n_{12}} g_1, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{g+1}{g-1},$$

а постоянная c определяется из условия

$$\int_{-a}^a \sigma_z^{(1)}(x, 0) dx = F_0,$$

здесь

$$F_0 = 2 \int_a^\infty f(x) dx. \quad (32)$$

Используя (21) и (30), можно определить нормальные составляющие вектора электрической индукции ($D_x(x, 0) = P(x)$). Используя (30), (29), (21), (16) и (9), можно определить все искомые функции. Далее по формулам (3), (2), (1) и основным соотношениям электроупругости (3), ортотропного изолятора (4) можно определить соответственно все компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке пьезокерамики и упругого поля в ортотропном изоляторе. Из (29), (30) и (21) видно, что на концах зоны полного контакта полуплоскостей механические напряжения, нормальные составляющие электрической индукции сопровождаются осцилляциями со значительными механическими и электрическими полями.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Կիսաանվերջ ճեղքերով թուլացված բաղադրյալ հարթության
էլեկտրաառածգականության տեսության համաչափ խնդիրը՝ լիցքավորված
էլեկտրոդի առկայությամբ

Դիտարկվում է պիեզակերամիկական կիսահարթությունից և նրան վերջավոր երկարությամբ կառչած օրթոտրոպ մեկուսիչ կիսահարթությունից բաղկացած բաղադրյալ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի համաչափ խնդիրը: Միացման գծում հարթությունը ունի երկու կիսաանվերջ ճեղքեր, որոնցում գործում են անվերջությունում մարտդ արտաքին մեխանիկական նորմալ լարումներ: Երկու հարթությունների կառչման տեղում առկա է բարակ, ճկուն լիցքավորված էլեկտրոդ: Ենթադրվում է, որ պիեզակերամիկայի նախնական բևեռացման ուղղությունը կիսահարթության յուրաքանչյուր կետում ուղղահայաց է կիսահարթության միացման գծին:

Օգտվելով զույգ ինտեգրալ հավասարումների մեթոդից, խնդրի լուծումը ստացվում է ճշգրիտ, փակ տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА – ՔՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С.А.Мелкумян, А.Ф.Улитко, Прикладная механика, т.23, №9, с.44-51 (1987).
- ² В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян, ДНАН Армении, т.92, №3, с.133-137 (1991).
- ³ В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, Н.А.Шульга, Механика связанных полей в элементах конструкции. Т.5. Электроупругость, Киев, Наукова думка, 1989. ⁴ Р.Кристенсен, Введение в механику композитов. М., Мир, 1982. ⁵ В.З.Партон, Б.А.Кудрявцев, Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел, М., Наука, 1988. ⁶ Ф.Д.Гахов, Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963. ⁷ С.Г.Михлин, Интегральные уравнения, М.-Л., ОГИЗ, 1949. ⁸ И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Изд.физ.-мат. лит., 1971.