ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

А. А. Баблоян, Л. М. Варданян, В. Т. Аванян

Характер напряженного состояния вблизи угловых точек анизотропных упругих тел

(Представлено академиком НАН Армении Э.Е.Хачияном 10/XII 1998)

Исследуется характер напряжений в малых окрестностях угловых точек анизотропного тела, когда анизотропия прямолинейная и ее главные оси составляют произвольные углы со сторонами угла.

Аналогичные вопросы для изотропных или составных тел подробно изучены в работах ([1-3]).

1. *Построение общего решения уравнений равновесия трансверсально-изотропного материала.* Известно ([4]), что уравнения равновесия для трансверсально-изотропного материала при плоскодеформированном состоянии имеют вид

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x_2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}=0;$$
$$(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+c_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=0, \tag{1.1}$$

где u_x, u_z – проекции вектора перемещений $\overline{U}, c_{i,j}$ – упругие постоянные. В (1.1) было принято, что главные направления анизотропии совпадают с осями координат ox, oz. Компоненты тензора напряжений определяются через вектора $\overline{U}$ уравнениями состояния (обобщенного закона Гука)

$$\sigma_x=c_{11}\frac{\partial u_x}{\partial x}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z};\quad \sigma_y=c_{12}\frac{\partial u_x}{\partial x}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z};$$
$$\sigma_z=c_{13}\frac{\partial u_x}{\partial x}+c_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z};\quad \tau_{xz}=c_{44}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right). \tag{1.2}$$

Вводим полярные (r,φ) и приведенные полярные (ρ,θ) координаты:

$$x = r\cos\varphi = \rho\cos\theta, \quad \alpha z = \alpha r\sin\varphi = \rho\sin\theta. \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\rho = r\,b(\varphi); \quad \operatorname{tg}\theta = \alpha\ \operatorname{tg}\varphi,\ b^2(\varphi) = \cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi, \\ \operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta(\varphi) > 0.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Значение параметра α определяется при построении общего решения уравнений (1.1).

Будем считать, что значения углов φ и $\operatorname{Re}\theta$ находятся в одной и той же четвертьплоскости.

Решение уравнения (1.1) в координатах (1.3) ищем в виде

$$u_x = \gamma_0(\alpha)\lambda^{-1}\Phi'(\lambda,\theta)\rho^{-\lambda},\ u_z = \Phi(\lambda,\theta)\rho^{-\lambda},\ \Phi''(\lambda,\theta) + \lambda^2\Phi(\lambda,\theta) = 0, \tag{1.5}$$

где λ – произвольный комплексный параметр, а функция $\gamma_0(\alpha)$ определяется в ходе решения. Подставляя (1.5) в (1.1), после ряда преобразований получим

$$\begin{gathered}\gamma_0(\alpha) = \frac{(c_{13}+c_{44})\alpha}{c_{11}-\alpha^2 c_{44}} = -\frac{c_{44}-\alpha^2 c_{33}}{(c_{13}+c_{44})\alpha}, \\ \Delta_0(\alpha) = (c_{11}-\alpha^2 c_{44})(c_{44}-\alpha^2 c_{33}) + (c_{13}+c_{44})^2\alpha^2 = 0.\end{gathered} \tag{1.6}$$

На основе (1.5) и (1.6) общее решение уравнения (1.1) для клиновидных областей будем представлять в виде интегралов Мелина

$$\begin{gathered}u_x = \frac{1}{2\pi i}\int\sum_{p=1}^{2}\gamma_0(\alpha_p)\lambda^{-1}\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\,b_p^{-\lambda}(\varphi)r^{-\lambda}d\lambda; \\ u_z = \frac{1}{2\pi i}\int\sum_{p=1}^{2}\Phi_p(\lambda,\theta_p)\,b_p^{-\lambda}(\varphi_p)r^{-\lambda}d\lambda.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Пользуясь уравнениями состояния (1.2), а также формулами поворота для компонент перемещений и напряжений ([6]), для компонент напряжений в полярной системе координат (1.3) получим

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\sum_{p=1}^{2}\frac{\gamma_3(\alpha_p)}{\alpha_p}\left[\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\cos\theta_p + \lambda\Phi_p(\lambda,\theta_p)\sin\theta_p\right]b_p^{-\lambda+1}(\varphi)r^{-\lambda-1}d\lambda;$$

$$\begin{gathered}\tau_{e\varphi} = \frac{1}{2\pi i}\int\sum_{p=1}^{2}\gamma_3(\alpha_p)\left[\frac{1}{\alpha_p^2}\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\sin\theta_p - \right. \\ \left. - \lambda\Phi_p(\lambda,\theta_p)\cos\theta_p\right]b_p^{-\lambda+1}(\varphi)r^{-\lambda-1}d\lambda;\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\sigma_r + \sigma_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\sum_{p=1}^{2}\frac{\alpha_p^2-1}{\alpha_p}\gamma_3(\alpha_p)\left[\lambda\Phi_p\sin\theta_p - \Phi'_p\cos\theta_p\right]b_p^{-\lambda-1}(\varphi)r^{-\lambda-1}d\lambda;$$

$$u_r = u_x\cos\varphi + u_z\sin\varphi; \quad v_\varphi = -u_x\sin\varphi + u_z\cos\varphi;$$

$$\gamma_3(\alpha)=c_{44}\gamma_2(\alpha)=c_{11}\alpha^{-1}\gamma_0(\alpha)-c_{13}=c_{33}\alpha^2-c_{13}\alpha\gamma_0(\alpha);$$
$$\gamma_2(\alpha)=\alpha\gamma_0(\alpha)+1.$$

2. *Вывод трансцендентных уравнений.* Применение теории вычетов к формулам (1.8) для малой окрестности вершины угла приводит к формулам вида

$$\left(\sigma_\varphi,\sigma_r,\tau_{r\varphi}\right)=\sum_k \Psi_p(\varphi,\lambda_k)r^{\lambda_k-1},\quad (0<r<<1), \tag{2.1}$$

где λ_k – корни трансцендентной целой функции.

Из (2.1) следует, что характер напряженного состояния в малой окрестности вершины угла анизотропного материала определяется значениями λ_k, а точнее значением $\operatorname{Re}\lambda_1$. Ясно, что значением $\operatorname{Im}\lambda_1$ определяются скорость осцилляции напряжений вблизи вершины угла. Вид этой функции с точностью до множителя определяется из вида граничных условий и не зависит от значений граничных функций.

Ниже приводятся некоторые трансцендентные функции, связанные с различными типами граничных условий на сторонах упругого анизотропного клина. Эти функции приводятся для общего случая, когда главные направления анизотропии составляют произвольные углы со сторонами клина.

Задача А. Граничные условия:

$$\sigma_\varphi(r,\varphi_1)=0;\quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi_1)=0;\ \sigma_\varphi(r,\varphi_2)=0;\ \tau_{r\varphi}(r,\varphi_2)=0$$
$$(0\le r<\infty,\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2). \tag{2.2}$$

Представим решение уравнения (1.5) в виде

$$\Phi_p(\lambda,\theta)=A_p(\lambda)\sin\lambda\theta+B_p(\lambda)\cos\lambda\theta\quad (p=1;2).$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.2) и применяя к формулам (1.8) обратное преобразование Мелина, для определения функций A_p и B_p получим однородную систему из четырех линейных уравнений. Для существования нетривиального решения требуем, чтобы основной детерминант этой системы D_A равнялся нулю.

$$D_A(\lambda)=\frac{(\alpha_p-\alpha_m)^2}{4\alpha_p\alpha_m}\cos\lambda(\theta_{po}+\theta_{mo})-$$
$$-\frac{(\alpha_p+\alpha_m)^2}{4\alpha_p\alpha_m}\cos\lambda(\theta_{po}-\theta_{mo})+\frac{\chi_p^\lambda+\chi_m^\lambda}{2}. \tag{2.3}$$

Ясно, что при неоднородных граничных условиях (2.2) вид трансцендентной функции $D_A(\lambda)$ не изменится.

Задача В. Граничные условия:

$$\sigma_\varphi(r,\varphi_1)=0;\quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi_1)=0;\quad u_r(r,\varphi_2)=0;\quad v_r(r,\varphi_2)=0. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом для трансцендентной функции $D_B(\lambda)$ этой задачи получим

$$D_B(\lambda)=\frac{\alpha_p-\alpha_m}{2\alpha_p\alpha_m}\left[\gamma_0(\alpha_p)-\gamma_0(\alpha_m)\right]\cos\lambda(\theta_{po}+\theta_{mo})+$$
$$+\frac{\alpha_p+\alpha_m}{2\alpha_p\alpha_m}\left[\gamma_0(\alpha_p)+\gamma_0(\alpha_m)\right]\cos\lambda(\theta_{po}-\theta_{mo})- \tag{2.5}$$
$$-\left[\frac{\gamma_2(\alpha_p)\gamma_0(\alpha_m)}{\alpha_p\gamma_2(\alpha_m)}\chi_p^\lambda+\frac{\gamma_2(\alpha_m)\gamma_0(\alpha_p)}{\alpha_m\gamma_2(\alpha_p)}\chi_m^\lambda\right].$$

Задача C. Граничные условия:

$$u_r(r,\varphi_1)=0;\quad v_\varphi(r,\varphi_1)=0;\quad u_r(r,\varphi_2)=0;\quad v_\varphi(r,\varphi_2)=0 \tag{2.6}$$

Трансцендентная функция

$$D_C(\lambda)=\frac{\left[\gamma_0(\alpha_p)-\gamma_0(\alpha_m)\right]^2}{4\gamma_0(\alpha_p)\gamma_0(\alpha_m)}\cos\lambda(\theta_{po}+\theta_{mo})-$$
$$-\frac{\left[\gamma_0(\alpha_p)+\gamma_0(\alpha_m)\right]^2}{4\gamma_0(\alpha_p)\gamma_0(\alpha_m)}\cos\lambda(\theta_{po}-\theta_{mo})+\frac{\chi_p^\lambda+\chi_m^\lambda}{2}. \tag{2.7}$$

Задача D. Граничные условия:

$$\tau_{r\varphi}(r,\varphi_1)=0;\quad v_\varphi(r,\varphi_1)=0,\quad \sigma_\varphi(r,\varphi_2)=0;\quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi_2)=0. \tag{2.8}$$

Трансцендентная функция

$$D_D(\lambda)=(\alpha_p-\alpha_m)\left\{\frac{\sin 2\varphi_1}{2}C_{pm}^{+}\left[\frac{\gamma_0(\alpha_p)}{\gamma_2(\alpha_p)}-\frac{\alpha_p^{-1}}{\gamma_2(\alpha_m)}\right]-\right.$$
$$-\frac{\sin 2\varphi_1}{2}C_{pm}^{-}\left[\frac{\gamma_0(\alpha_m)}{\gamma_2(\alpha_m)}-\frac{\alpha_m^{-1}}{\gamma_2(\alpha_p)}\right]+S_{pm}^{+}\cos^2\varphi_1\left[\gamma_2^{-1}(\alpha_p)-\gamma_2^{-1}(\alpha_m)\right]-$$
$$\left.-\left[\frac{\gamma_0(\alpha_p)}{\alpha_m\gamma_2(\alpha_p)}-\frac{\gamma_0(\alpha_m)}{\alpha_p\gamma_2(\alpha_m)}\right]\cdot S_{pm}^{-}\cdot\sin^2\varphi_1\right\}+ \tag{2.9}$$
$$+\sin 2\varphi_1\left[\frac{1-\alpha_m\gamma_0(\alpha_m)}{\chi_p^\lambda\gamma_2(\alpha_m)}+\frac{1-\alpha_p\gamma_0(\alpha_p)}{\chi_m^\lambda\gamma_2(\alpha_p)}\right].$$

Задача D'. Граничные условия:

$$\sigma_\varphi(r,\varphi_1)=0;\quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi_1)=0;\quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi_2)=0;\quad v_\varphi(r,\varphi_2)=0. \tag{2.10}$$

Трансцендентная функция

$$D'_{D'}(\lambda)=(\alpha_p-\alpha_m)\frac{\sin 2\varphi_2}{2}\left\{C^+_{pm}\left[\frac{\gamma_0(\alpha_p)}{\gamma_2(\alpha_p)}-\frac{\alpha_p^{-1}}{\gamma_2(\alpha_m)}\right]-\right.$$

$$\left.-C^-_{pm}\left[\frac{\gamma_0(\alpha_m)}{\gamma_2(\alpha_m)}-\frac{\alpha_m^{-1}}{\gamma_2(\alpha_m)}\right]\right\}-(\alpha_p-\alpha_m)\times \tag{2.11}$$

$$\times\left\{\left[\gamma_2^{-1}(\alpha_p)-\gamma_2^{-1}(\alpha_m)\right]S^+_{pm}\cos^2\varphi_2+\left[\frac{\gamma_0(\alpha_m)}{\alpha_p\gamma_2(\alpha_m)}-\frac{\gamma_0(\alpha_p)}{\alpha_m\gamma_3(\alpha_p)}\right]S^-_{pm}\sin^2\varphi_2\right\}+$$

$$+\sin 2\varphi_2\left[\frac{1-\alpha_p\gamma_0(\alpha_p)}{\chi_p^\lambda\gamma_2(\alpha_p)}+\frac{1-\alpha_m\gamma_0(\alpha_m)}{\chi_m^\lambda\gamma_2(\alpha_m)}\right].$$

В формулах (2.3)–(2.11) были использованы следующие обозначения

$$\operatorname{tg}\theta_p=\alpha_p\operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{tg}\theta_{pk}=\alpha_p\operatorname{tg}\varphi_k,\ b_p(\varphi_k)=$$

$$=\left(\cos^2\varphi_k+\alpha_p^2\sin^2\varphi_k\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\cos^2\theta_{pk}+\alpha_p^{-2}\sin^2\theta_{pk}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta_{po}=\theta_{p2}-\theta_{p1},\ \operatorname{Re} b_p(\varphi_k)>0\quad (k;p=1,2); \tag{2.12}$$

$$C^\pm_{pm}=\cos\lambda(\theta_{po}+\theta_{mo})\pm\frac{\alpha_p+\alpha_m}{\alpha_p-\alpha_m}\cos\lambda(\theta_{po}-\theta_{mo});$$

$$S^\pm_{pm}=\sin\lambda(\theta_{po}+\theta_{mo})\pm\frac{\alpha_p+\alpha_m}{\alpha_p-\alpha_m}\sin\lambda(\theta_{po}-\theta_{mo});$$

$$\chi_p=\frac{b_p(\varphi_2)b_m(\varphi_1)}{b_p(\varphi_1)b_m(\varphi_2)};\ S^\pm_{pm}=S^\pm_{mp};\ C^\pm_{pm}=C^\pm_{mp};\ \chi_p\chi_m=1\quad(p+m=3;\ p=1;2).$$

В формулах (2.3)–(2.11) α_p и α_m $(p+m=3;\ p=1;2)$ являются корнями уравнения (1.6), для которых $\operatorname{Re}\alpha_p>0$. Кроме того, значениями углов φ_1,φ_2 определяются как угол раствора клина $(\varphi_2-\varphi_1)$, так и углы между главными направлениями анизотропии со сторонами границ упругого клина.

Корни биквадратного уравнения (1.6) могут быть действительными, комплексными и совпадающими. Приведенные трансцендентные функции сохраняют свою силу для всех этих случаев.

В частном случае, когда корни уравнения (1.6) совпадают $(\alpha_1=\alpha_2)$, функции $D_A(\lambda)$ и $D_B(\lambda)$ другим методом были получены соответственно в работах ([7]) и ([8]). В работе ([8]) введением двух приведенных упругих постоянных автору удалось представить функцию $D_B(\lambda)$ в таком виде, в каком она получается для изотропного материала.

Рассмотрим частный случай, когда $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. При этом корни функций $D_B(\lambda)$ будут определяться из уравнения

$$\sin^2 \lambda\pi = (\alpha_p - \alpha_m)^{-1}\left[\frac{\alpha_p \gamma_0(\alpha_p)}{\gamma_2(\alpha_p)} - \frac{\alpha_m \gamma_0(\alpha_m)}{\gamma_2(\alpha_m)}\right]\frac{\gamma_2(\alpha_p) - \gamma_2(\alpha_m)}{\gamma_0(\alpha_p) - \gamma_0(\alpha_m)}. \tag{2.13}$$

Отсюда следует, что на концах жесткого штампа, сцепленного с границей полуплоскости или упругого клина, особенности напряжений не зависят от главных направлений анизотропии упругого материала. Если же $\varphi_2 \neq \varphi_1 + \pi$ или $\varphi_2 \neq \varphi_1 + 2\pi$, то в общем случае корни $D_B(\lambda)$ зависят от направления анизотропии.

Рассмотрим теперь случай, когда жесткий штамп давит на упругую полуплоскость или на клин без трения. Принимая в формулах (2.9) и (2.11) $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, для корней этих функций получим $(\lambda_k > 0)$

$$D_D(\lambda) = 0, \quad \lambda_k = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\beta_2}{\beta_1 \sin 2\varphi_1} + k; \; D_{D'}(\lambda) = 0,$$

$$\lambda_k = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\beta_2}{\beta_1 \sin 2\varphi_2} + k;$$

$$\beta_1 = \frac{2\alpha_p \alpha_m}{\alpha_p - \alpha_m}\left[\frac{\gamma_0(\alpha_p)}{\gamma_2(\alpha_p)} - \frac{\gamma_0(\alpha_m)}{\gamma_2(\alpha_m)} + \frac{\alpha_m^{-1}}{\gamma_2(\alpha_p)} - \frac{\alpha_p^{-1}}{\gamma_2(\alpha_m)}\right]; \tag{2.14}$$

$$\beta_2 = \frac{4\alpha_p \alpha_m}{\alpha_p - \alpha_m}\left[\left(\frac{1}{\gamma_2(\alpha_p)} - \frac{1}{\gamma_2(\alpha_m)}\right)\cos^2 \varphi_1 - \left(\frac{\gamma_0(\alpha_p)}{\alpha_m \gamma_2(\alpha_p)} - \frac{\gamma_0(\alpha_m)}{\alpha_p \gamma_2(\alpha_m)}\right)\sin^2 \varphi_1\right].$$

Как видно из (2.14), особенности напряжений вблизи концов гладкого жесткого штампа в общем случае отличны от общеизвестных корневых особенностей. Корневые особенности получаются только в том случае, когда главные направления анизотропии параллельны (перпендикулярны) границе полуплоскости или клина. Отметим, что в различных концах гладкого штампа степени особенностей напряжений отличны друг от друга, но сумма этих степеней, как следует из (2.14), равна целому числу (-1; 0; 1).

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Լ. Մ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Վ. Տ. ԱՎԱՆՅԱՆ

Լարումների վարքը անիզոտրոպ առաձգական մարմինների անկյունային կետերի մոտակայքում

Ուսումնասիրվում է լարումների վարքը կամայական բացվածքով անիզոտրոպ սեպի գագաթի փոքր շրջակայքում, երբ անիզոտրոպիայի գլխավոր ուղղությունները սեպի կողմերի հետ կազմում են կամայական անկյուններ:

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ անիզոտրոպիան ուղղագծային է: Հավասարակշռության հավասարումների ընդհանուր լուծումները սկզբում կառուցվում են դեկարտյան կոորդինատական համակարգում: Այնուհետև, օգտագործելով պտտման բանաձևերը, այդ լուծումները ներկայացվում են բևեռային կոորդինատական համակարգում, որը հնարավորություն է տալիս ստանալ աշխատանքում դիտարկված եզրային խնդիրների լուծումները: Որպես հիմնական արդյունք, աշխատանքում բերված են մի շարք դեպքերի համար այն տրանսցենդենտ ֆունկցիաների տեսքերը, որոնց արմատներով բնորոշվում են լարումների վարքերը անիզոտրոպ սեպի գագաթի փոքր շրջակայքում: Որոշ դեպքերի համար ստացված են արմատների անալիտիկ բանաձևեր՝ կախված անիզոտրոպիայի գործակիցներից և սեպի անկյան բացվածքից:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д.Б.Боджи*, Тр. ASME т. 35 сер.Е, №2, с.29-37 (1968). [2] *К.С.Чобанян*, Напряжение в составных упругих телах, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1987. [3] *В.С.Саркисян, В.Ж.Айрапетян*, Новые классы задач теории упругости анизотропного тела, Ереван, 1997. [4] *А.Ф.Улитко*, Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости, Киев, Наукова думка, 1979. [5] *В.З.Партон, Б.А.Кудрявцев*, Электромагнитоупругость, М., Наука, 1988. [6] *С.Г.Лехницкий*, Теория упругости анизотропных тел, М., Наука, 1977. [7] *Р.К.Алексанян*, ДАН АрмССР, т.61, №4 (1975). [8] *В.А.Едоян*, ДАН АрмССР, т.71, №1, с.22-27 (1980).