ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 529.3.01

М. С. Мкртчян

Напряженное состояние бесконечного кусочно-однородного пространства с произвольным числом коллинеарных трещин или абсолютно жестких включений при плоской и антиплоской деформациях

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 2/XI 1998)

Рассматриваются задачи о напряженном состоянии упругой кусочно-однородной плоскости, содержащей на линии соединения однородных полуплоскостей произвольное число математических щелей и абсолютно жестких тонких включений, а также соответствующие задачи о напряженном состоянии кусочно-однородного пространства при антиплоской деформации.

Основные достижения этой области теории упругости отражены в [1-4]. Укажем также работы [5,6].

1. Для кусочно-однородной упругой плоскости рассмотрим две родственные между собой задачи. В первой задаче пусть упругая бесконечная неоднородная плоскость, отнесенная к правой прямоугольной системе координат Oxy и состоящая из верхней и нижней полуплоскостей $y>0$ и $y<0$ с модулями сдвигов $\mu_\pm$ и коэффициентами Пуассона $\nu_\pm$ соответственно, на линии соединения полуплоскостей $y=0$ содержит систему L произвольного конечного числа N взаимно не пересекающихся математических щелей:

$$L=\left\{y=0;\bigcup_{k=1}^{N}L_k\right\}; L_k\,(L_k=\left[a_k,b_k\right],\ a_k<b_k,\ (k=1,\ldots,N),$$
$$b_k<a_{k+1},\ (k=1,\ldots,N-1).$$

Пусть далее упругая бесконечная плоскость, напряженно-деформированное состояние которой описывается известными уравнениями плоской деформации, на бесконечности в направлении осей Ox и Oy подвержена воздействию равномерно распределенных нормальных и касательных напряжений

$$\sigma_y\Big|_{y=\pm\infty} = \sigma_0,\ \tau_{yx}\Big|_{y=\pm\infty} = \tau_0,\ \sigma_x\Big|_{x=\pm\infty} = \begin{cases}\sigma_1^+ & (y>0),\\ \sigma_1^- & (y<0);\end{cases} \tau_{xy}\Big|_{x=\pm\infty} = \tau_0,$$

удовлетворяющих известному соотношению ([2]). Кроме того, на верхних $(y=+0)$ и нижних $(y=-0)$ краях щелей действуют нормальные и касательные распределенные силы различных интенсивностей, а именно:

$$\sigma_y\Big|_{y=\pm 0} = -\sigma_\pm(x),\ \ \tau_{yx}\Big|_{y=\pm 0} = -\tau_\pm,\quad (x \in L).$$

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах щелей, раскрытия трещин, нормальные и касательные напряжения вне системы щелей на линии их продолжения, а также коэффициенты интенсивностей этих напряжений на концах щелей.

Во второй задаче описанная выше составная упругая бесконечная плоскость на линии соединения верхней и нижней полуплоскостей $y=0$ вместо математических щелей содержит систему L произвольного конечного числа N взаимно не пересекающихся тонких абсолютно жестких включений. Пусть на упругую плоскость на бесконечности действуют указанные выше силовые факторы, а в точках $M_0^\pm(x_0^\pm, y_0^\pm)$ $(y_0^+>0, y_0^-<0)$ верхней и нижней полуплоскости действуют сосредоточенные силы $\overline{P}_\pm(X_\pm, Y_\pm)$. Кроме того, на абсолютно жесткое включение $L_k(L_k=[a_k,b_k],\ k=1,2,\ldots,N)$ действующие внешние силы имеют главный вектор $\overline{R}_k(X_k,Y_k)$ и главный момент M_k. Требуется определить скачки нормальных и касательных напряжений на верхних и нижних краях включений, а также эти же напряжения вне системы включений на их линии продолжения.

В первой задаче известным способом влияние действующих на бесконечности усилий перенесем на края щелей, воспользуемся линейным принципом суперпозиции и, разрезая бесконечную плоскость вдоль горизонтальной оси Ox на верхнюю и нижнюю полуплоскости, введем следующие обозначения:

$$-\sigma_y\Big|_{y=\pm 0} = P_\pm(x) = \begin{cases}\sigma_\pm(x)+\sigma_0 & (x\in L),\\ \sigma(x) & (x\in L');\end{cases}$$

$$-\tau_{yx}\Big|_{y=\pm 0} = T_\pm(x) = \begin{cases}\tau_\pm(x)+\tau_0 & (x\in L),\\ \tau(x) & (x\in L');\end{cases} \qquad (1.1)$$

$$\chi_\pm(x) = T_\pm(x) + iP_\pm(x)\ \ (x\in R)\ \ \chi(x) = \tau(x)+i\sigma(x)\ \ (x\in L')$$

$$R = \{y=0; -\infty<x<+\infty\};\quad L' = R/L.$$

Введем в рассмотрение также функции скачков смещений на щелях $\Phi(x) = u_+(x) - u_-(x)$ и $\Psi(x) = v_+(x) - v_-(x)$,

$$\Phi(x) = \begin{cases}\varphi(x) & (x\in L),\\ 0 & (x\in L');\end{cases}\qquad \Psi(x) = \begin{cases}\psi(x) & (x\in L),\\ 0 & (x\in L');\end{cases} \qquad (1.2)$$

Здесь $u_\pm(x)$ – горизонтальные, $v_\pm(x)$ – вертикальные смещения граничных точек верхней (+) и нижней (-) полуплоскостей. Для производных смещений $u'_\pm(x)$; $v'_\pm(x)$; по известному методу (7) находим

$$u'_\pm(x)+iv'_\pm(x)=\pm\frac{A_\pm}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi_\pm(u)du}{u-x}+iB_\pm\chi_\pm(x)\quad(x\in R),$$
$$A_\pm=(1-\nu_\pm)\mu_\pm^{-1},\quad B_\pm=(1-2\nu_\pm)\left(2\mu_\pm^{-1}\right)^{-1},\tag{1.3}$$

где интеграл при $u=x$ понимается в смысле главного значения по Коши.

При помощи (1.3) и интегрального преобразования Фурье получим следующее ключевое уравнение задачи:

$$-iB_1\Omega(x)+\frac{A_\pm}{\pi}\int_L\frac{\Omega(u)du}{u-x}=F(x)\quad(|x|<\infty);\quad\Omega(x)=\Phi'(x)+i\Psi'(x),$$
$$F(x)=i\frac{A_2}{\pi}\int_L\frac{\left[\chi_+(u)-\chi_{-+}(u)\right]du}{u-x}+(B_2+1)\chi_+(u)-B_2\chi_{-+}(u)\quad(x\in R),\tag{1.4}$$

где A_k и $B_k\ (k=1,2)$ – известные постоянные.

Рассматривая ключевое уравнение (1.4) на системе щелей L, придем к сингулярному интегральному уравнению

$$-iB_1\Omega(x)+\frac{A_1}{\pi}\int_L\frac{\Omega(u)du}{u-x}=F(x)\quad(x\in L),\tag{1.5}$$

при условиях

$$\int_{L_k}\Omega(x)dx=0\quad(k=1,2,\ldots,N),\tag{1.6}$$

выражающих условия непрерывности смещений в концевых точках щелей.

Рассматривая же ключевое уравнение (1.4) вне щелей, согласно (1.1) и (1.3) будем иметь

$$\chi(x)=\frac{A_1}{\pi}\int_L\frac{\Omega(u)du}{u-x}-i\frac{A_2}{\pi}\int_L\frac{\left[\chi_+(u)-\chi_{-+}(u)\right]du}{u-x}\quad(x\in L').\tag{1.7}$$

Обращаясь ко второй задаче, отметим, что на включениях имеют место условия

$$u_+(x)=u_-(x)=\delta_k,\quad v_+(x)=v_-(x)=\gamma_k+\alpha_kx\quad(x\in L_k),\ (k=1,\ldots,N)$$

где δ_k – жесткое смещение k-того включения вдоль оси Ox, γ_k – вдоль оси Oy, а α_k – его угол поворота против часовой стрелки.

Введя обозначения

$$-\sigma_y\Big|_{y=\pm0}=\widetilde{P}_\pm(x)=\begin{cases}\widetilde{\sigma}_\pm(x) & (x\in L)\\ \widetilde{\sigma}(x) & (x\in L');\end{cases}$$

$$-\tau_{yx}\Big|_{y=\pm 0}=\widetilde{T}_{\pm}(x)=\begin{cases}\widetilde{\tau}_{\pm}(x) & (x\in L)\\ \widetilde{\tau}(x) & (x\in L');\end{cases}$$

и используя принцип линейной суперпозиции, аналогичным путем получим ключевое уравнение второй задачи:

$$-iB_3\chi_0(x)+\frac{A_3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi_0(u)du}{u-x}=F_0(x)\ \ (-\infty<x<+\infty);$$

$$F_0(x)=-i\frac{A_4}{\pi}\int_L\frac{f_1(u)du}{u-x}+\left(B_4+1\right)f_1(x)-\widetilde{f}_1(x)+\widetilde{\Omega}(x)\ \ (-\infty<x<+\infty); \tag{1.8}$$

$$\chi_0(x)=\widetilde{\chi}_+(x)-\widetilde{\chi}_-(x),\qquad \widetilde{\chi}_{\pm}(x)=\widetilde{T}_{\pm}(x)+iP_{\pm}(x),$$

где A_k и $B_k\,(k=3{,}4)$ – известные постоянные, функции $f_1(x),\widetilde{f}_1(x)$ учитывают действующие силовые факторы, а функция $\widetilde{\Omega}(x)$ учитывает смещения на линии соединения верхней и нижней полуплоскостей.

Рассматривая теперь ключевое уравнение (1.8) на системе включения L, придем к сингулярному интегральному уравнению

$$-iB_3\chi_0(x)+\frac{A_3}{\pi}\int_L\frac{\chi_0(u)du}{u-x}=F_0(x)\ \ (x\in L) \tag{1.9}$$

при условиях

$$\int_L\chi_0(x)dx=X_k+iY_k;\quad \int_L x\,\mathrm{Im}\,\chi_0(x)dx=M_k\quad (k=1,\ldots,N). \tag{1.10}$$

Далее напряжения вне системы включений на их линии продолжения определяются формулой

$$\widetilde{\chi}(x)=\widetilde{\tau}(x)+i\widetilde{\sigma}(x)=iB_1f_1(x)-\frac{A_1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(u)du}{u-x}-\frac{A_2}{\pi}\int_L\frac{\chi_0(u)du}{u-x}\ \ (x\in L'). \tag{1.11}$$

При помощи известных методов из ([7]) запишем решение для задачи (1.5)–(1.6)

$$\Omega(x)=i\frac{B_1}{B_1^2-A_1^2}F(x)+\frac{A_1X_0^+(x)}{\pi(B_1^2-A_1^2)}\int_L\frac{F(t)dt}{X_0^+(t)(t-x)}+$$
$$+X_0^+(x)P_{N-1}(x)\ \ (x\in L),$$

$$X_0(z)=\prod_{k=1}^{N}(z-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta},$$

$$P_{N-1}(x)=C_0+C_1x+\ldots+C_{N-1}x^{N-1}, \tag{1.12}$$

$$\beta=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{A_1+B_1}{A_1-B_1},$$

где $X_0^+(t)$ граничное значение $X_0(z)$ на верхнем берегу L, а $C_0,\ldots,C_{N-1}$ произвольные постоянные, определяющиеся из условий (1.6).

Теперь при помощи формул (1.12) и (1.7) для разрушающих напряжений будем иметь

$$\chi(x)=\tau(x)+i\sigma(x)=-i\frac{(A_1B_2-A_2B_1)X_0(x)}{\pi(B_1-A_1)}\int_L\frac{\left[\chi_+(t)-\chi_-(t)\right]dt}{X_0^+(t)(t-x)}+$$

$$+\frac{A_1X_0(x)}{\pi(B_1-A_1)}\int_L\frac{\chi_+(t)dt}{X_0^+(t)(t-x)}+i\frac{A_2X_0(x)}{\pi}\int_L Q_{N-1}(t,x)\left[\chi_+(t)-\chi_-(t)\right]dt+ \quad (1.13)$$

$$+i(A_1+B_1)X_0(x)P_{N-1}(x),\quad (x\in L');\quad Q_{N-1}(t,x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\sum_{l=1}^{k}t^{k-l}x^{l-1}.$$

Здесь коэффициенты $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ определяются известной методикой ([7]) при помощи разложения функции $1/X_0(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Далее, как в ([2,8,9]), исходя из (1.13) определим коэффициенты интенсивностей по формулам

$$K_{b_l}=K_1^{b_l}-iK_2^{b_l}=i\frac{2\pi}{\operatorname{ch}(\pi\beta)}\lim_{x\to b_l+0}(x-b_l)^{-\frac{1}{2}+i\beta}\chi(x);$$

$$(l=1,\ldots,N)$$

$$K_{a_l}=K_1^{a_l}-iK_2^{a_l}=i\frac{2\pi}{\operatorname{ch}(\pi\beta)}\lim_{x\to a_l-0}(a_l-x)^{-\frac{1}{2}-i\beta}\chi(x)$$

и в результате получим их явные выражения:

$$K_{c_l}=\frac{\sqrt{2\pi}I_1^{(l)}}{\operatorname{ch}(\pi\beta)}\left\{-\frac{(A_1B_2-A_2B_1)}{\pi(B_1-A_1)}\int_L\frac{\left[\chi_+(t)-\chi_-(t)\right]dt}{X_0^+(t)(t-c_l)}-\frac{A_1}{\pi(B_1-A_1)}\int_L\frac{\chi_+(t)dt}{X_0^+(t)(t-c_l)}-\right.$$

$$\left.-\frac{A_2}{\pi}\int_L Q_{N-1}(t,c_l)\left[\chi_+(t)-\chi_-(t)\right]dt-(A_1+B_1)P_{N-1}(c_l)\right\};$$

$$\left(c_l=b_l,\ j=1;\quad c_l=a_l,\ j=2\right)\quad (l=1,\ldots,N)$$

$$I_l^{(1)}=\left(b_l-a_l\right)^{-\frac{1}{2}+i\beta}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N}(b_l-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(b_l-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta};\qquad (1.14)$$

$$I_l^{(2)}=ie^{\pi\beta}\left(a_l-b_l\right)^{-\frac{1}{2}-i\beta}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N}(a_l-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(a_l-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta}.$$

Отметим также, что раскрытие трещины на участке $L_k\,(k=1,\ldots,N)$ определяется по формуле

$$\varphi(x)+i\psi(x)=\int_{a_k}^{x}\Omega(u)du,\quad (x\in L_k).$$

Вполне аналогичным способом построим решение сингулярного интегрального уравнения задачи о включениях (1.9)–(1.10), а затем из (1.11) находим напряжения вне включений на линии их продолжения.

Коэффициенты интенсивности (1.14), содержащие осциллирующие интегралы, можно вычислить с большой точностью.

2. Теперь вкратце остановимся на соответствующих задачах о трещинах и включениях при антиплоской деформации. Пусть кусочно-однородное пространство, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ и находящееся в условиях антиплоской деформации в направлении оси Oz, состоит из верхнего и нижнего полупространства ($y>0$, $y<0$) с модулями сдвигов $\mu_\pm$ соответственно и в плоскости $y=0$ ослаблено системой сквозных трещин

$$\omega=\left\{y=0;\bigcup_{k=1}^{N}\omega_k,\ -\infty<z<+\infty\right\};\omega_k=\left[a_k,b_k\right],\ k=1,\ldots,N;$$

$$a_k<b_k,\,(k=1,\ldots,N),\,b_k<a_{k+1},\,(k=1,\ldots,N-1).$$

Пусть далее края трещин нагружены силами произвольных интенсивностей

$$-\tau_{yz}\Big|_{y=\pm0}=-\tau_\pm(x)\quad (x\in\omega),$$

вызывающими продольный сдвиг упругого пространства в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Требуется определить плотность дислокаций смещений на краях щелей раскрытия трещин, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений.

Во второй задаче описанное выше составное упругое бесконечное пространство на плоскости соединения $y=0$ вместо системы сквозных трещин содержит систему ω произвольных взаимно не пересекающихся тонких абсолютно жестких включений. Пусть в точках $M_0^\pm(x_0^\pm,y_0^\pm)$ $(y_0^+>0,\,y_0^-<0)$ верхнего и нижнего полупространства приложены сосредоточенные силы $\vec{P}_\pm$, а на включениях ω_k действуют силы с равнодействующим $\vec{P}_k$, направленным вдоль оси Oz. Требуется определить скачки напряжений на верхних и нижних берегах включений, а также эти же напряжения вне системы включений, на их линии продолжения.

Далее описанным выше способом можно получить определяющие уравнения поставленных задач и построить их решения, которые вполне аналогичны приведенным выше решениям.

Институт механики НАН Армении

Մ. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Կամայական թվով համագիծ ճաքերով կամ բացարձակ կոշտ ներդրակներով կտոր առ կտոր համասեռ տարածության լարվածային վիճակը հարթ և հակահարթ դեֆորմացիաների դեպքում

Աշխատանքում դիտարկվում են կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական հարթության լարվածային վիճակի վերաբերյալ հարթ և կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական տարածության լարվածային վիճակի վերաբերյալ հակահարթ դեֆորմացիաներով պայմանավորված խնդիրները: Ընդ որում ենթադրվում է, որ տարասեռ կիսահարթությունների կամ կիսատարածությունների միացման գծերի կամ մակերևույթների վրա, համապատասխանաբար, կան կամայական թվով ճաքեր, որոնց ափերը բեռնավորված են նորմալ և շոշափող լարումներով, կամ բարակապատ բացարձակ կոշտ ներդրակներով: Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության, անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային խնդիրների տեսության և սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մաթեմատիկական մեթոդների օգնությամբ կառուցված են դրված խնդիրների փակ լուծումները: Բացահայտ տեսքերով ներկայացված են լարումների ուժգնության գործակիցները, ճաքերի բացվածքները, լարումների թռիչքները ներդրակների վրա և մյուս մեխանիկական բնութագրիչները:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Развитие теории контактных задач в СССР, М., Наука, 1976. [2] *М.П.Саврук*, Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов. Спр. пособие под общей ред. В.В.Панасюка, т.2. Киев, Наукова думка, 1988. [3] Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Под редакцией Ю.Мураками, т.1, М., Мир, 1990. [4] *В.В. Панасюк, Л.Т.Бережницкий, Н.Г.Стащук*, Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле, Киев, Наукова думка, 1983. [5] *М.С.Мкртчян, С.М.Мхитарян*, ДНАН Армении, т.94, №2, с.104-110 (1993). [6] *М.С.Мкртчян, С.М.Мхитарян*, ДНАН Армении, т.94, №3, с.147-153 (1993). [7] *Н.И.Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., Наука, 1966. [8] *С.Райс*, Прикладная механика. Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков, сер.Е, т.32, №2, с.186-192 (1965). [9] *Эрдоган*, Прикладная механика. Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков, сер.Е, т.30, №2, с.83-87 (1963).