ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

С. О. Саркисян

Асимптотическая теория и вариационное уравнение задачи изгиба упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости

(Представлено академиком НАН Армении С.А.Амбарцумяном 5/I 1999)

Построению теории изгиба тонких пластин по моментной теории упругости посвящены работы ([1-4]). Обзор работ в этом направлении представлен в ([5]). В работах ([6,7]) на основе уравнений трехмерной несимметричной теории упругости построена теория изгиба пластин моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений на уровне общеизвестной уточненной теории пластин ([8]). Построение прикладной теории изгиба тонких пластин по несимметричной теории упругости можно осуществить, применяя асимптотический метод интегрирования трехмерных уравнений несимметричной теории упругости в области тонкой пластинки ([9,10]).

В данной работе излагается асимптотическая теория изгиба (обратно-симметричная по x_3 задача) тонкой пластинки по моментной теории упругости. Построен функционал общего вариационного принципа прикладной теории изгиба пластин по несимметричной теории упругости, на основе которого выводятся основные разрешающие уравнения и граничные условия указанной теории. При построении и изучении асимптотических разложений в трехмерной области тонкой пластинки будем руководствоваться общеизвестным асимптотическим методом ([11-13]) изучения проблем теории тонких пластин и оболочек.

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Отнесем срединную плоскость к декартовой прямоугольной системе координат Ox_1, Ox_2. Ось Ox_3 будет направлена по нормали к срединной плоскости пластинки. Будем исходить из основных уравнений теории несимметричной упругости с независимыми полями перемещений и вращений ([14]):

уравнения равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ij} = 0, \quad \nabla_j \mu^{ij} + \varepsilon^{ijk} \cdot \sigma_{jk} = 0, \tag{1}$$

физические соотношения

$$\begin{cases}\sigma_{ij}=(\mu+\alpha)\gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\gamma_{ji}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{ij},\\ \mu_{ij}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}+\beta\chi_{kk}\delta_{ij},\end{cases}\tag{1.2}$$

либо в обратной форме

$$\begin{cases}\gamma_{ij}=(\mu'+\alpha')\sigma_{ij}+(\mu'-\alpha')\sigma_{ji}+\lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk},\\ \chi_{ij}=(\gamma'+\varepsilon')\mu_{ij}+(\gamma'-\varepsilon')\mu_{ji}+\beta'\delta_{ij}\mu_{kk},\end{cases}\tag{1.3}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ij}=\nabla_i u_j-\varepsilon_{kij}\omega^k,\quad \chi_{ij}=\nabla_i\omega_j,\tag{1.4}$$

где σ^{ij}, μ^{ij} – компоненты силовых и моментных напряжений, γ_{ij}, χ_{ij} – компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения, u – вектор перемещения, ω – вектор независимого поворота точек тела, λ, μ, α, β, γ, ε или λ', μ', α', β', γ', ε' – упругие постоянные материала пластинки.

На плоскостях $x_3=\pm h$ пластинки заданы условия

$$\sigma_{3i}=p_i^{\pm},\quad \mu_{3i}=m_i^{\pm}\ \text{при}\ x_3=\pm h.\tag{1.5}$$

На боковой поверхности пластинки $(\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2)$ заданы условия смешанного типа

$$\begin{cases}\sigma^{ji}n_j=p_*^i,\ \mu^{ji}n_j=m_*^i\quad \text{на}\ \Sigma_1,\\ u=u_*(x_i),\ \omega=\omega_*(x_i)\quad \text{на}\ \Sigma_2.\end{cases}\tag{1.6}$$

Решение поставленной задачи складывается из суммы решений симметричной по x_3 и обратно-симметричной задач.

Рассмотрим обратно-симметричную по x_3 задачу (теория изгиба).

1. В уравнениях трехмерной несимметричной теории упругости перейдем к безразмерной координатной системе [11-13]

$$\xi=\frac{x_1}{l},\quad \eta=\frac{x_2}{l},\quad \zeta=\frac{x_3}{h},\tag{2.1}$$

где l – характерный размер пластинки. В результате на основе (1.1)–(1.4) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром $\delta=\dfrac{h}{l}$, решение которой складывается из двух типов решений: незатухающего при удалении от боковой поверхности в глубь области и типа погранслоя.

Рассмотрим определение незатухающего (внутреннего) напряженно-деформированного состояния.

Решение внутренней задачи ищем в виде

$$Q=\delta^{-q}\sum_{S=0}^{S}\delta^{S}Q^{(S)},\tag{2.2}$$

где Q – любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов.

После подстановки (2.2) в систему уравнений (1.1)–(1.4) с учетом (2.1) получим непротиворечивую систему относительно коэффициентов $Q^{(S)}$ разложения при обратно-асимметричной по ζ задаче, лишь при

$$\begin{cases} q=1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{33}, \omega_1, \omega_2, u_3, \\ q=0 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{13}, \mu_{23}, u_1, u_2, \omega_3. \end{cases} \tag{2.3}$$

Полученную систему уравнений можно интегрировать по ζ в результате чего получим

$$\begin{cases} u_3^{(S)} = w^{(S)}(\xi,\eta) + u_3^{*(S)}, \; u_1^{(S)} = \zeta v_1^{(S)}(\xi,\eta) + u_1^{*(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \\ \omega_1^{(S)} = \Omega_1^{(S)}(\xi,\eta) + \omega_1^{*(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \; \omega_3^{(S)} = \zeta\Omega_3^{(S)}(\xi,\eta) + \omega_3^{*(S)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(S)} = \zeta\tau_{11}^{(S)}(\xi,\eta) + \sigma_{11}^{*(S)}, \; \sigma_{12}^{(S)} = \zeta\tau_{12}^{(S)}(\xi,\eta) + \sigma_{12}^{*(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{31}^{(S)} = T_{31}^{(S)}(\xi,\eta) + \sigma_{31}^{*(S)}, \; \sigma_{13}^{(S)} = T_{13}^{(S)}(\xi,\eta) + \sigma_{13}^{*(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{33}^{(S)} = T_{33}^{(S)}(\xi,\eta) + \sigma_{33}^{*(S)}, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \mu_{13}^{(S)} = \zeta\upsilon_{13}^{(S)}(\xi,\eta) + \mu_{13}^{*(S)}, \; \mu_{31}^{(S)} = \zeta\upsilon_{31}^{(S)}(\xi,\eta) + \mu_{31}^{*(S)}, \\ \mu_{11}^{(S)} = \upsilon_{11}^{(S)}(\xi,\eta) + \mu_{11}^{*(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \\ \mu_{12}^{(S)} = \upsilon_{12}^{(S)}(\xi,\eta) + \mu_{12}^{*(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \; \mu_{33}^{(S)} = \upsilon_{33}^{(S)}(\xi,\eta) + \mu_{33}^{*(S)}, \end{cases} \tag{2.6}$$

где
$$\begin{cases} v_1^{(S)} = l\left[\Omega_2^{(S)} + (\mu'+\alpha')T_{31}^{(S)} + (\mu'-\alpha')T_{13}^{(S)}\right], \; (1 \leftrightarrow 2), \\ \Omega_3^{(S)} = l\left[(2\gamma'+\beta')\upsilon_{33}^{(S)} + \beta'\left(\upsilon_{11}^{(S)} + \upsilon_{22}^{(S)}\right)\right], \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} T_{13}^{(S)} = \dfrac{1}{\mu'+\alpha'}\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial w^{(S)}}{\partial\zeta} + \dfrac{1}{\mu'+\alpha'}\Omega_2^{(S)} - \dfrac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}T_{31}^{(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \\ T_{33}^{(S)} = -\left(\dfrac{\partial T_{13}^{(S)}}{\partial\xi} + \dfrac{\partial T_{23}^{(S)}}{\partial\eta}\right), \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \upsilon_{11}^{(S)} = \dfrac{\beta'+2\gamma'}{(\beta'+2\gamma')^2 - \beta'^2}\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial\Omega_1^{(S)}}{\partial\xi} - \dfrac{\beta'}{(\beta'+2\gamma')^2 - \beta'^2}\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial\Omega_2^{(S)}}{\partial\eta} - \\ \qquad - \dfrac{2\beta'\gamma'}{(\beta'+2\gamma')^2 - \beta'^2}\upsilon_{33}^{(S)}, \; (1 \leftrightarrow 2), \\ \upsilon_{12}^{(S)} = \dfrac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'}\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial\Omega_2^{(S)}}{\partial\xi} - \dfrac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'}\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial\Omega_1^{(S)}}{\partial\eta}, \; (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} \tau_{11}^{(S)} = \dfrac{2\mu' + \lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial v_1^{(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial v_2^{(S)}}{\partial \eta} - \\ \quad - \dfrac{2\mu'\lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} T_{33}^{(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{12}^{(S)} = \dfrac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial v_2^{(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial v_1^{(S)}}{\partial \eta} - \dfrac{1}{2\alpha'} \Omega_3^{(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \upsilon_{31}^{(S)} = -\left[\dfrac{\partial \upsilon_{11}^{(S)}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \upsilon_{21}^{(S)}}{\partial \xi} + l\left(T_{23}^{(S)} - T_{32}^{(S)}\right) \right], \ (1 \leftrightarrow 2) \\ \upsilon_{13}^{(S)} = \dfrac{1}{\gamma' + \varepsilon'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \Omega_3^{(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \upsilon_{31}^{(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.11}$$

Величины со звездочками определяются по формулам

$$\begin{cases} u_1^{*(S)} = l \displaystyle\int_0^\zeta \omega_2^{*(S)} d\zeta + l \int_0^\zeta \left[(\mu' + \alpha')\sigma_{31}^{*(S)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{13}^{*(S)} \right] d\zeta, \ (1 \leftrightarrow 2), \\ u_3^{*(S)} = l \displaystyle\int_0^\zeta \left[\lambda'\left(\sigma_{11}^{(S-2)} + \sigma_{22}^{(S-2)}\right) + (\lambda' + 2\mu')\sigma_{33}^{(S-2)} \right] d\zeta, \\ \omega_3^{*(S)} = l \displaystyle\int_0^\zeta \left[\beta'\left(\mu_{11}^{*(S)} + \mu_{22}^{*(S)}\right) + (\beta' + 2\gamma')\mu_{33}^{*(S)} \right] d\zeta, \\ \omega_1^{*(S)} = l \displaystyle\int_0^\zeta \left[(\gamma' + \varepsilon')\mu_{31}^{(S-2)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{13}^{(S-2)} \right] d\zeta, \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} \sigma_{31}^{*(S)} = -\displaystyle\int_0^\zeta \left(\dfrac{\partial \sigma_{11}^{(S-2)}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \sigma_{21}^{(S-2)}}{\partial \eta} \right) d\zeta, (1 \leftrightarrow 2), \ \sigma_{33}^{*(S)} = -\displaystyle\int_0^\zeta \left(\dfrac{\partial \sigma_{13}^{(S)}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \sigma_{23}^{(S)}}{\partial \eta} \right) d\zeta, \\ \sigma_{13}^{*(S)} = \dfrac{1}{\mu' + \alpha'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial u_3^{*(S)}}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\mu' + \alpha'} \omega_2^{*(S)} - \dfrac{\mu' - \alpha'}{\mu' + \alpha'} \sigma_{31}^{*(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \mu_{33}^{*(S)} = -\displaystyle\int_0^\zeta \left[\left(\dfrac{\partial \mu_{11}^{(S-2)}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \mu_{23}^{(S-2)}}{\partial \eta} \right) + l\left(\sigma_{12}^{(S-2)} - \sigma_{21}^{(S-2)} \right) \right] d\zeta, \\ \mu_{11}^{*(S)} = \dfrac{\beta' + 2\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \omega_1^{*(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\beta'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \omega_2^{*(S)}}{\partial \eta} - \\ - \dfrac{2\beta'\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \mu_{33}^{*(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \\ \mu_{12}^{*(S)} = \dfrac{\gamma' + \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \omega_2^{*(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\gamma' - \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \omega_1^{*(S)}}{\partial \eta}, \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{*(S)} = \left[\dfrac{2\mu' + \lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial u_1^{*(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial u_2^{*(S)}}{\partial \eta} \right] - \\ \qquad - \dfrac{2\mu'\lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \sigma_{33}^{*(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{12}^{*(S)} = \dfrac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial u_2^{*(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial u_1^{*(S)}}{\partial \eta} - \dfrac{1}{2\alpha'} \omega_3^{*(S)}, \ \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} \mu_{31}^{*(S)} = -\int\limits_0^{\varsigma} \left[\left(\dfrac{\partial \mu_{11}^{*(S)}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \mu_{21}^{*(S)}}{\partial \xi} \right) + l\left(\sigma_{23}^{*(S)} - \sigma_{32}^{*(S)} \right) \right] d\zeta, \ \ (1 \leftrightarrow 2), \\ \mu_{13}^{*(S)} = \dfrac{1}{\gamma' + \varepsilon'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \omega_3^{*(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \mu_{31}^{*(S)}, \ \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.16}$$

и являются полиномами по ζ (при $S = 0;1$ они равны нулю). Формулы (2.12)–(2.16) имеют рекуррентный характер и позволяют определить величины со звездочкой для приближения S, если известны все величины, относящиеся к приближениям $0,1,\ldots,(S-1)$.

При $S = 0$ и $S = 1$, как это следует из выражений (2.4), будем иметь следующую качественную картину распределения перемещений и поворотов по толщине пластинки. При этом нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные компоненты вектора поворота по толщине пластинки постоянны (не зависят от координаты x_3). Эти качественные результаты можно принимать как гипотезу для построения прикладной теории изгиба тонких пластин по моментной теории упругости.

Будем требовать, чтобы определяемые по формулам (2.5), (2.6) силовые и моментные напряжения удовлетворяли граничным условиям (1.5) (в смысле обратно-симметричной по x_3 задачи), в результате получим

$$\begin{cases} T_{31}^{(S)} = \dfrac{1}{2} X_2^{(S)}, \ T_{32}^{(S)} = \dfrac{1}{2} Y_2^{(S)}, \ T_{33}^{(S)} = \dfrac{1}{2} Z_2^{(S)}, \\ \upsilon_{31}^{(S)} = \dfrac{1}{2} m_2^{(S)}, \ \upsilon_{32}^{(S)} = \dfrac{1}{2} p_2^{(S)}, \ \upsilon_{33}^{(S)} = \dfrac{1}{2} q_2^{(S)}, \end{cases} \tag{2.17}$$

где

$$\begin{cases} X_2^{(0)} = X_2, \ X_2^{(1)} = 0, \ X_2^{(k)} = -2\sigma_{31}^{*(k)}(\zeta = 1), \ k > 1, \\ m_2^{(0)} = m_2, \ m_2^{(1)} = 0, \ m_2^{(k)} = -2\mu_{31}^{*(k)}(\zeta = 1), \ k > 1, \\ X_2 = p_1^+ - p_1^-, \ m_2 = m_1^+ + m_1^-, \ \ (1 \leftrightarrow 2), (X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z), (m \leftrightarrow p \leftrightarrow q). \end{cases} \tag{2.18}$$

Уравнения (2.4)-(2.18) составляют полную систему относительно неизвестных

$v_1^{(S)}$, $v_2^{(S)}$, $w^{(S)}$, $\Omega_1^{(S)}$, $\Omega_2^{(S)}$, $\Omega_3^{(S)}$, $\tau_{11}^{(S)}$, $\tau_{22}^{(S)}$, $\tau_{12}^{(S)}$, $\tau_{21}^{(S)}$, $\tau_{31}^{(S)}$, $\tau_{32}^{(S)}$, $\tau_{13}^{(S)}$, $\tau_{23}^{(S)}$, $\tau_{33}^{(S)}$, $\upsilon_{13}^{(S)}$, $\upsilon_{23}^{(S)}$ $\upsilon_{31}^{(S)}$, $\upsilon_{32}^{(S)}$, $\upsilon_{33}^{(S)}$, $\upsilon_{11}^{(S)}$, $\upsilon_{22}^{(S)}$, $\upsilon_{12}^{(S)}$, $\upsilon_{21}^{(S)}$, $T_{31}^{(S)}$, $T_{32}^{(S)}$, $T_{33}^{(S)}$.

При этом основная разрешающая система уравнений относительно величин $T_{13}^{(S)}$, $T_{23}^{(S)}$, $\upsilon_{11}^{(S)}$, $\upsilon_{22}^{(S)}$, $\upsilon_{12}^{(S)}$, $\upsilon_{21}^{(S)}$, $\Omega_1^{(S)}$, $\Omega_2^{(S)}$, $w^{(S)}$ будет:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{13}^{(S)}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial T_{23}^{(S)}}{\partial \eta} = -\dfrac{1}{2} Z_2^{(S)}, \\ \dfrac{\partial \upsilon_{11}^{(S)}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \upsilon_{21}^{(S)}}{\partial \eta} + l\left(T_{23}^{(S)} - T_{32}^{(S)}\right) = -\dfrac{1}{2} m_2^{(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2) \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} T_{13}^{(S)} = \dfrac{1}{\mu' + \alpha'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial w^{(S)}}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\mu' + \alpha'} \Omega_2^{(S)} - \dfrac{\mu' - \alpha'}{\mu' + \alpha'} T_{31}^{(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \\ \upsilon_{11}^{(S)} = \dfrac{2\gamma' + \beta'}{(2\gamma' + \beta')^2 - \beta'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \Omega_1^{(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\beta'}{(2\gamma' + \beta')^2 - \beta'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \Omega_2^{(S)}}{\partial \eta} - \\ \quad - \dfrac{2\gamma'\beta'}{(2\gamma' + \beta')^2 - \beta'^2} \upsilon_{33}^{(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \\ \upsilon_{12}^{(S)} = \dfrac{\gamma' + \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'^2} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \Omega_2^{(S)}}{\partial \xi} - \dfrac{\gamma' - \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'} \dfrac{1}{l} \dfrac{\partial \Omega_1^{(S)}}{\partial \eta}, \ (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{2.20}$$

Систему (2.19), (2.20), в свою очередь, можно свести к трем уравнениям относительно $\Omega_1^{(S)}, \Omega_2^{(S)}$ и $W^{(S)}$. Найдя неизвестные, входящие в (2.19), (2.20), по соответствующим формулам определим все величины внутренней задачи.

3. Вводим теперь интегральные по толщине пластинки усилия и моменты. Для обратно-симметричной (по ζ) задачи этими понятиями будут моменты $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$ и перерезывающие усилия N_{13}, N_{23}, которые определяются по формулам

$$L_{11} = \int_{-h}^{h} \mu_{11} dx_3, \ L_{12} = \int_{-h}^{h} \mu_{12} dx_3, \ N_{13} = \int_{-h}^{h} \sigma_{13} dx_3, \ (1 \leftrightarrow 2). \tag{3.1}$$

Обозначим через $L_{11}^{(S)}, L_{22}^{(S)}, L_{12}^{(S)}, L_{21}^{(S)}, N_{13}^{(S)}, N_{23}^{(S)}$ значения этих величин для приближения S. Учитывая (2.5), (2.6) и (3.1), для этих величин получим

$$\begin{gathered} L_{11}^{(S)} = 2l\delta^S \upsilon_{11}^{(S)} + l\delta^S L_{11}^{*(S)}, \ L_{12}^{(S)} = 2l\delta^S \upsilon_{12}^{(S)} + l\delta^S L_{12}^{*(S)}, \\ N_{13}^{(S)} = 2l\delta^S T_{13}^{(S)} + l\delta^S N_{13}^{*(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2) \end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{cases} \left(L_{11}^{*(S)}, L_{22}^{*(S)}, L_{12}^{*(S)}, L_{21}^{*(S)}\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\mu_{11}^{*(S)}, \mu_{22}^{*(S)}, \mu_{12}^{*(S)}, \mu_{21}^{*(S)}\right) d\zeta, \\ \left(N_{13}^{*(S)}, N_{23}^{*(S)}\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sigma_{13}^{*(S)}, \sigma_{23}^{*(S)}\right) d\zeta, \end{cases} \tag{3.3}$$

причем

$$L_{11} = \sum_{S=0}^{S} L_{11}^{(S)}, \ L_{12} = \sum_{S=0}^{S} L_{12}^{(S)}, \ N_{13} = \sum_{S=0}^{S} N_{13}^{(S)}, \ (1 \leftrightarrow 2), \tag{3.4}$$

Используя (3.1), выразим $\upsilon_{11}^{(S)}, \upsilon_{22}^{(S)}, \upsilon_{12}^{(S)}, \upsilon_{21}^{(S)}, T_{13}^{(S)}, T_{23}^{(S)}, \tau_{11}^{(S)}, \tau_{22}^{(S)}, \tau_{12}^{(S)}, \tau_{21}^{(S)}, \upsilon_{13}^{(S)}, \upsilon_{23}^{(S)}$ через усилия, моменты соответственно и, подставляя их в систему (2.19), (2.20), будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{13}^{(S)}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial N_{23}^{(S)}}{\partial x_2}=-\delta^S Z_2^{(S)}+l\delta^S\left(\dfrac{\partial N_{13}^{\bullet(S)}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial N_{23}^{\bullet(S)}}{\partial x_2}\right), \\ \dfrac{\partial L_{11}^{(S)}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial L_{21}^{(S)}}{\partial x_2}+N_{23}^{(S)}=-\delta^S m_2^{(S)}+ \\ +l\delta^S\left(\dfrac{\partial L_{11}^{\bullet(S)}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial L_{21}^{\bullet(S)}}{\partial x_2}+N_{23}^{\bullet(S)}+Y_2^{(S)}\right),\ (1\leftrightarrow 2) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} L_{11}^{(S)}=2h\dfrac{2\gamma'+\beta'}{(2\gamma'+\beta')^2-\beta'^2}k_{11}^{(S)}-2h\dfrac{\beta'}{(2\gamma'+\beta')^2-\beta'^2}k_{22}^{(S)}- \\ \quad -l\delta^S\dfrac{2\gamma'\beta'}{(2\gamma'+\beta')^2-\beta'^2}q_2^{(S)}+l\delta^S L_{11}^{\bullet(S)},\quad (1\leftrightarrow 2), \\ L_{12}^{(S)}=2h\dfrac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'^2}k_{12}^{(S)}-2h\dfrac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'^2}k_{21}^{(S)}+l\delta^S L_{12}^{\bullet(S)},\quad (1\leftrightarrow 2), \\ N_{13}^{(S)}=\dfrac{2h}{\mu'+\alpha'}\Gamma_{13}^{(S)}-\lambda\delta^S\dfrac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}X_2^{(S)}+l\delta^S N_{13}^{\bullet(S)},\quad (1\leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{3.6}$$

где

$$\Gamma_{13}^{(S)}=\delta^{-1+S}\left(\frac{\partial w^{(S)}}{\partial x_1}+\Omega_2^{(S)}\right),\ k_{11}^{(S)}=\delta^{-1+S}\frac{\partial\Omega_1^{(S)}}{\partial x_1}, \qquad k_{12}^{(S)}=\delta^{-1+S}\frac{\partial\Omega_2^{(S)}}{\partial x_2},\ (1\leftrightarrow 2). \tag{3.7}$$

Здесь $\Gamma_{13}^{(S)}, \Gamma_{23}^{(S)}$ – компоненты сдвиговой деформации, $k_{11}^{(S)}, k_{22}^{(S)}, k_{12}^{(S)}, k_{21}^{(S)}$ – компоненты изгиба-кручения срединной плоскости пластинки.

Если подставить (3.6) и (3.7) в (3.5), получим систему из трех дифференциальных уравнений относительно величин $\Omega_1^{(S)}, \Omega_2^{(S)}$`ew^{(S)}`.

4. Построение математически обоснованной теории тонких пластин по несимметричной теории упругости, в рамках приближений получаемой асимптотической теории, требует также применения общего вариационного принципа.

Функционал общего вариационного принципа трехмерной теории несимметричной упругости имеет вид

$$I=\iiint_V\left\{W(\gamma_{ij},\chi_{ij})-\sigma_{ij}\left[\gamma_{ij}-\left(\nabla_i u_j-\varepsilon_{kij}\omega_k\right)\right]-\mu_{ji}\left(\chi_{ij}-\nabla_i\omega_j\right)\right\}dv-$$

$$-\iint_{S^+}\left(\overset{+}{p^i}u_i+\overset{+}{m^i}\omega_i\right)dS-\iint_{S^-}\left(\overset{-}{p^i}u_i+\overset{-}{m^i}\omega_i\right)dS-\iint_{\Sigma_1}\left(p^i u_i+m^i\omega_i\right)dS- \tag{4.1}$$

$$
-\iint_{\Sigma_2}\left[p^i\left(u_i-u_i^*\right)+m^i\left(\omega_i-\omega_i^*\right)\right]dS,
$$

где $W\left(\gamma_{ij},\ \chi_{ij}\right)$ – плотность потенциальной энергии деформации (13).

Варьируя функционал (4.1) по всем функциональным аргументам, приходим (в качестве уравнений Эйлера и естественных эйлеровых граничных условий) к уравнениям (1.1)–(1.4) и граничным условиям (1.5), (1.6) трехмерной теории несимметричной упругости.

На основе результатов асимптотической теории тонких пластин возможно приведение функционала (4.1) к двумерному континиуму.

После перехода к координатам (2.1) и подстановки (2.2) в выражение (4.1) будем удерживать в нем члены, имеющие наибольший асимптотический порядок (т.е. δ^{-1}), в итоге получим формулу, определяющую функционал теории изгиба тонких пластин по несимметричной теории упругости

$$
\begin{aligned}
I_0 = \int_S \Bigg\langle W_0 - \Bigg\{ & N_{13}\left[\Gamma_{13}-\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Omega_2\right)\right]+N_{23}\left[\Gamma_{23}-\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}-\Omega_1\right)\right]+ \\
&+L_{11}\left(k_{11}-\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)+L_{22}\left(k_{22}-\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)+ \qquad (4.2)\\
&+L_{21}\left(k_{21}-\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)+L_{12}\left(k_{12}-\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)\Bigg\}\Bigg\rangle dS-\int_S\left(X_2h\Gamma_{31}+Y_2h\Gamma_{32}+q_2hk_{33}\right)dS- \\
&-\int_S\left(Z_2w+\left(m_2-Y_2h\right)\Omega_1+\left(p_2+X_2h\right)\Omega_2\right)dS-\int_{l_1}\left(N_\nu^*w+L_{\nu\nu}^*\Omega_\nu+L_{\nu\tau}^*\Omega_\tau\right)dl- \\
&-\int_{l_2}\left[N_\nu\left(w-w^*\right)+L_{\nu\nu}\left(\Omega_\nu-\Omega_\nu^*\right)+L_{\nu\tau}\left(\Omega_\tau-\Omega_\tau^*\right)\right]dl,
\end{aligned}
$$

где плотность (поверхностная) потенциальной энергии деформации выражается так:

$$
\begin{aligned}
W_0 = & \frac{1}{2}\mu 2h\left(\Gamma_{32}+\Gamma_{23}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha 2h\left(\Gamma_{32}-\Gamma_{23}\right)^2+\frac{1}{2}2h\mu\left(\Gamma_{31}+\Gamma_{13}\right)^2+ \\
&+\frac{1}{2}2h\alpha\left(\Gamma_{31}-\Gamma_{13}\right)^2+\frac{1}{2}2\gamma 2h\left(k_{11}^2+k_{22}^2+k_{33}^2\right)+ \qquad (4.3)\\
&+\frac{1}{2}2h\beta\left(k_{11}+k_{22}+k_{33}\right)^2+2h\frac{1}{2}\gamma\left(k_{21}+k_{12}\right)^2+\frac{1}{2}2h\varepsilon\left(k_{21}-k_{12}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Здесь $\Gamma_{13}, \Gamma_{23}, k_{11}, k_{22}, k_{21}, k_{12}$ – компоненты сдвиговой деформации и изгиба-кручения срединной плоскости пластинки; w – прогиб; Ω_1, Ω_2 – повороты (независимые) соответственно осей Ox_1 и Ox_2 точек срединной плоскости пластинки (отметим, что в данном случае, т.е. в случае, соответствующем исходному приближению асимптотического метода, перемещение по оси Ox_3 и повороты вокруг осей Ox_1 и Ox_2 постоянны по координате x_3):

$L^*_{\upsilon\upsilon}$, $L^*_{\upsilon t}$, N^*_υ – внешние контурные усилия и моменты (на l_1); w^*, Ω^*_1, Ω^*_2 – перемещения и повороты (на l_2) точек контура срединной плоскости пластинки.

Следует отметить, что Γ_{31}, Γ_{32}, k_{33} не содержат дополнительных степеней свободы, они выражаются формулами

$$\begin{cases} \Gamma_{31} = -\dfrac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\Gamma_{13} + \dfrac{1}{2(\mu+\alpha)}X_2, \quad (1\leftrightarrow 2),(X\leftrightarrow Y), \\ k_{33} = \dfrac{\beta'}{2(\gamma'+\beta')}\left(k_{11}+k_{22}\right) + \dfrac{\gamma'(2\gamma'+3\beta')}{\gamma'+\beta'}\dfrac{1}{2}m_3. \end{cases} \tag{4.4}$$

Варьируя функционал (4.3) по всем функциональным аргументам, приходим к уравнениям теории изгиба пластин по несимметричной теории упругости, а именно:

уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + Z_2^* = 0, \\ \dfrac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + N_{23} + \left(m_2 + X_2 h\right) = 0, \ (1\leftrightarrow 2),(X\leftrightarrow Y), \end{cases} \tag{4.5}$$

соотношения упругости

$$\begin{cases} N_{13} = 2h\dfrac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Gamma_{13} + X_2 h\dfrac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}, \quad (1\leftrightarrow 2),(X\leftrightarrow Y), \\ L_{11} = 2h\dfrac{2\gamma'+\beta'}{4\gamma'(\gamma'+\beta')}k_{11} - 2h\dfrac{\beta'}{4\gamma'(\gamma'+\beta')}k_{22} - \\ \qquad -\dfrac{\beta'}{2(\gamma'+\beta')}hq_2, \ (1\leftrightarrow 2), \\ L_{12} = 2h(\gamma+\varepsilon)k_{12} + 2h(\gamma-\varepsilon)k_{21}, \quad (1\leftrightarrow 2), \end{cases} \tag{4.6}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \quad k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \quad (1\leftrightarrow 2) \tag{4.7}$$

граничные условия

$$\begin{aligned} &\text{на} \quad l_1\!: \ N_\upsilon = N^*_\upsilon, \ \ L_{\upsilon\upsilon} = L^*_{\upsilon\upsilon}, \ \ L_{\upsilon t} = L^*_{\upsilon t}. \\ &\text{на} \quad l_2 : \ w = w^*, \ \ \Omega_\upsilon = \Omega^*_\upsilon, \ \ \Omega_t = \Omega^*_t. \end{aligned} \tag{4.8}$$

При подстановке (4.6), (4.7) в (4.5) получим уравнение прикладной теории изгиба тонких пластин по несимметричной теории упругости в перемещениях и независимых поворотах.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Առաձգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ սալի ծռման խնդրի ասիմպտոտիկական տեսությունը և վարիացիոն հավասարումը

Աշխատանքում շարադրվում է առաձգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ սալի ծռման ասիմպտոտիկական տեսությունը: Կառուցվում է առաձգականության մոմենտային տեսությամբ բարակ սալի ծռման կիրառական տեսության վարիացիոն հավասարումը, որի հիման վրա արտածվում են այդ տեսության հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները և եզրային պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г.А.Геворкян*, ПМ, т.2, в.7, с.74-79 (1966). [2] *A.E.Green, P.M.Naghdi*, Q.J.Mech. appl. Math., v.20, p.183-199 (1967). [3] *E.Reissner*, Int.J.Solids Structurs, v.5, p.525-532 (1969). [4] *A.G.Eringen*, Z.angew. Math. Phys., v.18, p.12-30 (1967). [5] *Ю.В.Кириллов, А.А.Постников, А.И.Тюленев*, в сб. Исследования по теории пластин и оболочек, Казань, Изд-во КГУ, с.18-43 (1990). [6] *С.А.Амбарцумян*, Механика композиционных материалов, т.32, №1, с.42-52 (1996). [7] *С.А.Амбарцумян*, Изв. АН ПФ, МТТ, №1, с.152-153 (1997). [8] *С.А.Амбарцумян*, Теория анизотропных пластин. М., Наука, 1987. [9] *В.А.Дудников, С.А.Назаров*, ДАН СССР, т.262, №2, с.306-309 (1982). [10] *С.О.Саркисян*, Актуальные проблемы механики оболочек. Тр.междунар.конф., посвященной памяти засл. деят. науки ТАССР проф.А.В.Саченкова. Казань: 9-11 сентября 1998г. Казанское мат. о-во, Унипресс, с.198-203 (1998). [11] *А.Л.Гольденвейзер*. Теория упругих тонких оболочек, М., Наука, 1976. [12] *Л.А.Агаловян*, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек, М., Наука, 1997. [13] *С.О.Саркисян*, Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек, Ереван, Изд-во АН Армении, 1992. [14] *В.Новацкий*, Теория упругости, М., Мир, 1975. 1975.