ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик НАН Армении **С. А. Амбарцумян, С. В. Саркисян**

Колебание двухслойной пластинки во внешнем магнитном поле

(Представлено 1/XII 1998)

Рассматривается задача колебания тонкой двухслойной пластинки, составленной из двух однородных изотропных материалов, во внешнем постоянном поперечном магнитном поле $\overline{B}_0(0,0,B)$. Примем, что координатная плоскость xoy совпадает с плоскостью спая слоев, которая параллельна внешним плоскостям пластинки. Будем считать также, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения. Первый слой характеризуется модулем упругости E_1, коэффициентом Пуассона ν_1, плотностью ρ_1 и толщиной h_1, а второй, являясь магнитоэлектроактивным, – E_2, ν_2, ρ_2, h_2 и проводимостью σ. Примем, что свойства среды, омывающей второй слой пластинки, отождествлены со свойствами вакуума. Трехмерная задача магнитоупругих колебаний двухслойной пластинки сводится к совместному интегрированию следующих систем дифференциальных уравнений ([1]):

– уравнения электродинамики для области, занимаемой телом $(-h_2 \le z < 0)$,

– уравнения электродинамики для среды, окружающей второй слой пластинки $(z \ge 0,\ \infty < z < -h_2)$,

– уравнения теории упругости с учетом объемных сил электромагнитного происхождения.

К приведенным уравнениям следует присоединить условия на внешних плоскостях и на плоскостях контакта двух слоев пластинки ([2]):

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0 \text{ при } z = h_1,$$
$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)},\ \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)},\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} \text{ при } z = 0,$$
$$\sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = 0 \text{ при } z = -h_2, \quad (1)$$
$$h_x = h_x^{(e)},\ h_y = h_y^{(e)},\ h_z = h_z^{(e)},\ e_x = e_x^{(e)},\ e_y = e_y^{(e)} \text{ при } z = 0; -h_2,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; h_x, h_y, h_z, e_x и e_y – компоненты вектора индуцированного электромагнитного поля (величины, отмеченные индексом (e), относятся к внешней области второго слоя пластинки), а также граничные условия на торцах пластинки и условия на бесконечности.

Для приведения трехмерной задачи магнитоупругих колебаний двухслойной пластинки к двумерной примем гипотезу Кирхгофа для пакета в целом, а для электродинамических величин – гипотезу магнитоупругости тонких тел ([1]), которые аналитически запишутся в виде

$$u_x = u(x,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial x},\; u_y = v(x,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial y},\; u_z = w(x,y,t),$$
$$e_x = \varphi(x,y,t),\; e_y = \psi(x,y,t),\; h_z = f(x,y,t), \tag{2}$$

где u,v,w – искомые перемещения точек координатной плоскости xoy пластинки, φ,ψ,f – искомые функции индуцированного электромагнитного поля. Осредняя уравнения теории упругости с учетом объемных сил электромагнитного происхождения, согласно (1) и (2), получим следующие уравнения движения пластинки в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu_3}{2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{1-\nu_3}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K\frac{\partial}{\partial x}\Delta w +$$
$$+\frac{\sigma B h_2}{c(C_1+C_2)}\left(\psi - \frac{B}{c}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h_2 B}{2c}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right) = \frac{n^*}{C_1+C_2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k^*}{C_1+C_2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu_3}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{1-\nu_3}{2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K\frac{\partial}{\partial y}\Delta w -$$
$$-\frac{\sigma B h_2}{c(C_1+C_2)}\left(\varphi + \frac{B}{c}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{h_2 B}{2c}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) = \frac{n^*}{C_1+C_2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{k^*}{C_1+C_2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2},$$
$$(D_1+D_2)\Delta^2 w + n^*\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} -$$
$$-(K_1-K_2)\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\sigma B h_2^2}{c}\left(\frac{h_2 B}{3c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Delta w + \right. \tag{3}$$
$$\left. +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{B}{2c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) +$$
$$+k^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) - m^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w = 0.$$

Из систем уравнений электродинамики для внутренней и внешней областей получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi-\frac{B}{c}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{h_2 B}{2c}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)=\frac{h_x^0-h_x^-}{h_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi+\frac{B}{c}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{h_2 B}{2c}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)=\frac{h_y^0-h_y^-}{h_2},$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(h_x^0-h_x^-)=\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(h_y^0-h_y^-)=\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (4)$$

Здесь c — электродинамическая постоянная,

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad K=\frac{K_1-K_2}{C_1+C_2},\quad n^*=\rho_1 h_1+\rho_2 h_2,$$

$$k^*=\frac{\rho_1 h_1^2-\rho_2 h_2^2}{2},\quad m^*=\frac{\rho_1 h_1^3+\rho_2 h_2^3}{3},\quad C_i=\frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2},$$

$$K_i=\frac{E_i h_i^2}{2\left(1-\nu_i^2\right)},\quad D_i=\frac{E_i h_i^3}{3\left(1-\nu_i^2\right)},\quad \nu_3=\frac{\nu_2 C_2+\nu_1 C_1}{C_1+C_2}\quad (i=1,2).$$

Присоединяя к полученной системе уравнений (3)–(4) граничные и начальные условия задачи [1,2], можно решать задачи колебаний и распространения волны в двухслойной пластинке при наличии внешнего поперечного магнитного поля. Однако в общем виде эти задачи почти неразрешимы. Целесообразнее рассматривать отдельные частные случаи.

Рассмотрим преимущественно поперечные колебания двухслойной пластинки-полосы во внешнем поперечном магнитном поле. Удовлетворяя граничным условиям шарнирного опирания по краям $x=0$ и $x=a$ [1,2], из уравнений (3) и (4) для определения величины ω, характеризующей частоту колебаний и затухания, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda_m+\frac{2\pi\sigma h_2\omega}{c^2}\right)\cdot\left[n^*\omega^2+\left(D_1+D_2-K\left(K_1-K_2\right)\right)\lambda_m^4+\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma B^2 h_2^2\lambda_m^2}{c^2}\left(K+\frac{2h_2}{3}\omega\right)\right]=0. \qquad (5)$$

Здесь принято, что $\frac{\omega^2}{c^2}<<\lambda_m^2$, $\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}>>\lambda_m^2$, $\lambda_m=\frac{m\pi}{a}$, m — целое число.

Отсюда легко заметить, что первое уравнение (равенство нулю первой скобки уравнения (5)) описывает затухание электромагнитного поля с указанной выше точностью. Частоты преимущественно поперечных колебаний двухслойной пластинки во внешнем магнитном поле определяются из второго уравнения []=0 (5). Слоистость пластинки и внешнее магнитное поле приводят к затухающим во времени колебаниям пластинки.

Теперь рассмотрим случай, когда в законе Ома для движущейся среды напряжением электрического поля можно пренебречь ([3]). Это приближение применимо для задач, в которых эффект магнитотермоупругости в основном приводит к демпфированию возмущений. В этом случае система уравнений движения двухслойной пластинки в магнитном поле упрощается, а характеристическое уравнение (5) сводится к следующему уравнению:

$$n^{*}\omega^{2}+\left(D_{1}+D_{2}-K\left(K_{1}-K_{2}\right)\right)\lambda_{m}^{4}+\frac{\sigma B^{2}h_{2}^{2}\lambda_{m}^{2}}{c^{2}}\left(\frac{h_{2}}{3}+\frac{1}{2}K\right)\omega=0. \qquad (6)$$

Сравнивая уравнения (5) и (6), легко заметить, что при данном приближении отсутствует затухание электромагнитного поля, а демпфирующие свойства колебания, обусловленные слоистостью пластинки и влиянием внешнего магнитного поля, уменьшаются в два раза.

Выше мы рассмотрели весьма частный пример колебания двухслойной пластинки в магнитном поле. Полную картину колебания двухслойной пластинки во внешнем поперечном магнитном поле можно получить из подробного анализа системы уравнений (3) и (4).

Настоящее исследование выполнено по гранту INTAS-94-1210.

Ереванский государственный университет

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս **Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Ս. Վ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ**

Երկշերտ սալի տատանումը արտաքին մագնիսական դաշտում

Դիտարկվում է երկշերտ սալի տատանման խնդիրը արտաքին լայնական մագնիսական դաշտում: Ստացված է երկշերտ սալի շարժման հավասարումների համակարգը, երբ շերտերից մեկը մագնիսաէլեկտրաակտիվ է: Երկշերտ սալի գերակշռող լայնական տատանումների հաճախությունը և մարումը որոշելու համար ստացված է հավասարում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С.А.Амбарцумян, Г.Е.Багдасарян, М.В.Белубекян*, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, М., Наука, 1977. [2] *С.А.Амбарцумян*, Теория анизотропных пластин, М., Наука, 1987. [3] *С.А.Амбарцумян, М.В.Белубекян*, Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин, Ереван, Изд-во АН Армении, 1992.