ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

С. А. Арутюнян, академик НАН Армении **М. А. Задоян**

Зона пластичности в конической трубе

(Представлено 6/XI 1998)

У многих металлических материалов, таких, как углеродные стали и их сплавы, медь и др., по диаграмме растяжения после зоны текучести наступает зона упрочнения, когда материал проявляет новые способности заметно повышать сопротивляемость при дальнейшем пластическом деформировании до разрушения. Тем самым возникает задача определения напряженного состояния, а также критических значений внешних сил, соответствующих временному сопротивлению данного материала ([1,2]).

Полагаем, что материал трубы после площадки текучести упрочняется по линейному закону, причем по схематизированной диаграмме одноосного растяжения, показанной на рис.1. Здесь σ_s – предел текучести, σ_* – напряжение временного сопротивления, G и H – модули упругости и упрочнения. Эти параметры определяются экспериментально по одноосному растяжению или при кручении тонкостенных цилиндрических труб.

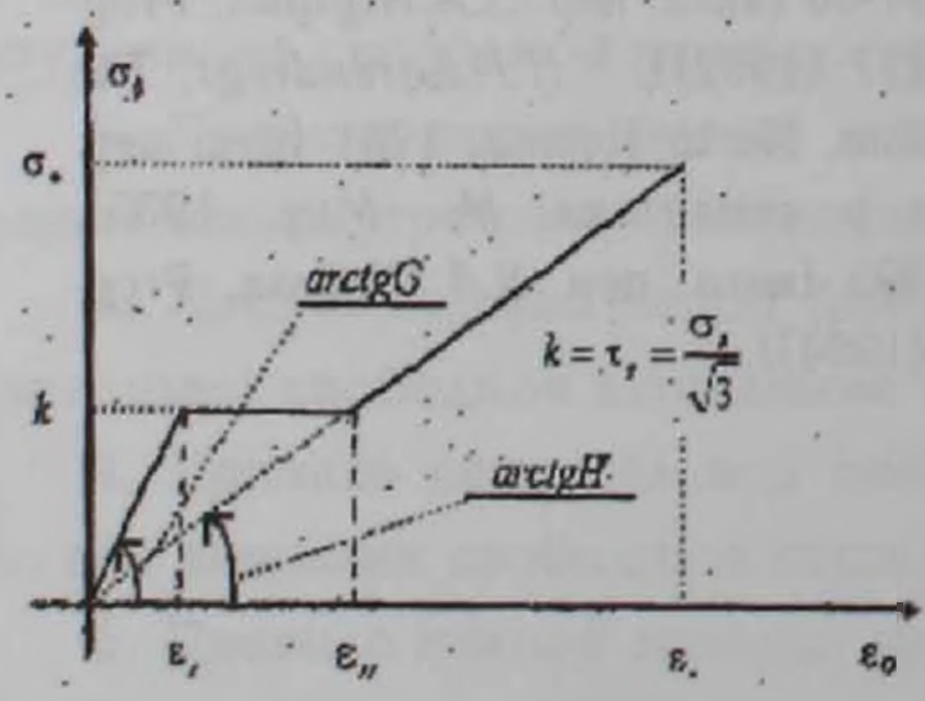

Рис.1.

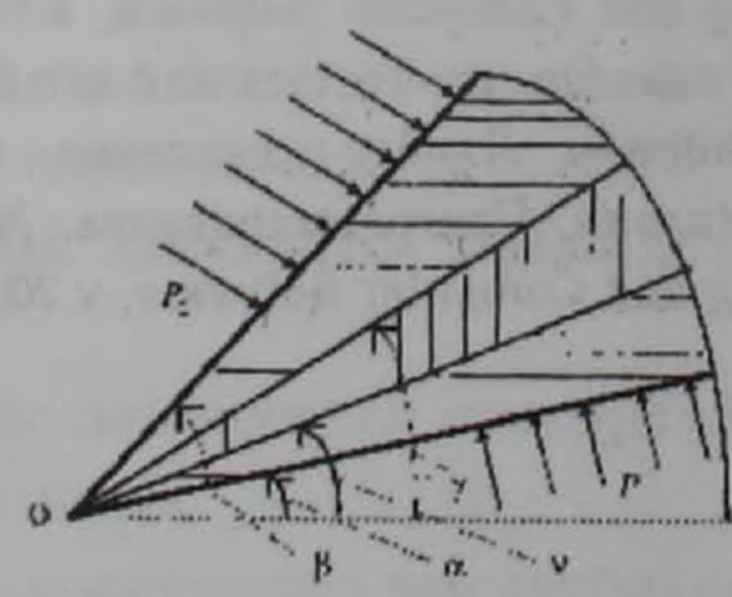

Рис.2.

Исследуется напряженное состояние длинной толстостенной конической трубы из несжимаемого материала, характеризующегося указанной диаграм-

мой. Принимаем, что труба находится под совместным воздействием нормальных и кольцевых касательных, равномерно распределенных на внутренней $\theta = \alpha$ и внешней $\theta = \beta$ конических поверхностях сил (рис.2)

$$\sigma_\theta = -p_i, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_i \text{ при } \theta = \alpha; \beta, \tag{1}$$

где индексы $i = 1,2$ относятся, соответственно, к внутренней и внешней поверхностям [3,4].

Полагаем, что уровень указанных внешних сил таков, что труба находится в трехзонном напряженном состоянии, причем вокруг внутренней конической поверхности материал находится в стадии упрочнения, вокруг внешней конической поверхности – в упругом состоянии, а между этими слоями – в состоянии текучести.

Исходя из соображений осесимметричности деформирования, полагаем, что граничные поверхности между зонами упрочнения и текучести $\theta = \nu$ и зонами текучести и упругости $\theta = \gamma$, положения которых следует определить в ходе решения задачи, также являются коническими.

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций принимается в форме

$$\sigma_0 = f(\varepsilon_0)\varepsilon_0,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2 + \tau_{r\varphi}^2)},$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2 + 6(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2 + \gamma_{r\varphi}^2)}.$$

В области упругости имеем $f = G, 0 \le \varepsilon_0 \le \varepsilon_s$, в области текучести $f = \sigma_s / \varepsilon_0$, $\varepsilon_s \le \varepsilon_0 \le \varepsilon_m$, в области упрочнения $f = H$, $\varepsilon_m \le \varepsilon_0 \le \varepsilon_*$, параметры, характеризующие деформативные свойства материала. Зависимости между компонентами деформаций и напряжений при условии несжимаемости материала

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 0 \tag{2}$$

принимаем в форме

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2f(\varepsilon_0)\varepsilon_{ij}, \tag{3}$$

где σ среднее напряжение.

Перемещения, удовлетворяющие условию несжимаемости (2), представим в виде

$$v_i = \frac{A_i r}{\sin\theta}, \; w_i = r\psi_i \sin\theta, \; u_i = 0, \tag{4}$$

где $\psi_i = \psi_i(\theta)$; A_i – неизвестные функции и постоянные, а индексы $i = 1,2,3$ соответствуют зонам упрочнения, текучести и упругости соответственно.

Используя условия непрерывности перемещения на граничных поверхностях $\theta = \nu$ и $\theta = \gamma$, получаем

$$A_i = A,\ \psi_1(\nu) = \psi_2(\nu),\ \psi_2(\gamma) = \psi_3(\gamma).$$

Отличные от нуля деформации будут

$$\varepsilon_{\varphi i} = -\varepsilon_{\theta i} = \frac{A\cos\theta}{\sin^2\theta},\ 2\gamma_{\theta\varphi i} = \psi_i' \sin\theta. \tag{5}$$

Компоненты напряжения на (3) и (5) представляются в следующем виде:

$$\sigma_{\varphi i} = \sigma_{\theta i} + 4fA\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},\ \sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 2fA\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$
$$\tau_{\theta\varphi i} = f\psi' \sin\theta. \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия сводится к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial\sigma_{\theta i}}{\partial\theta} + \left(\sigma_{\theta i} - \sigma_{\varphi i}\right)ctg\theta = 0,$$
$$\frac{\partial\tau_{\theta\varphi i}}{\partial\theta} + 2\tau_{\theta\varphi i}ctg\theta = 0. \tag{7}$$

1. *Решение в зоне упрочнения* ($\alpha \le \theta \le \nu$). Используя первое уравнение равновесия (7), зависимости (6) для нормальных напряжений, полагая в них $f = H$, а также применяя граничное условие при $\theta = \alpha$ согласно (1), получаем

$$\sigma_{\varphi 1} = \sigma_{\theta 1} + 4HA\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},\ \sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} + 2HA\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$
$$\sigma_{\theta 1} = -P_1 + 2HA\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \ln\frac{tg\frac{\theta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}}\right),\ \alpha \le \theta \le \nu. \tag{8}$$

Из второго уравнения (7) путем интегрирования и использования условия $\tau_{\theta\varphi}$ согласно (1) будем иметь

$$\tau_{\theta\varphi 1} = q_1\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} = \tau,\ \alpha \le \theta \le \nu. \tag{9}$$

Сопоставляя полученное выражение $\tau_{\theta\varphi 1}$ с соответствующей формулой в (6) при $f = H$, интегрированием находим

$$\psi_1 = \psi_1(\nu) + \frac{1}{H}\int_{\theta}^{\nu} \frac{\tau}{\sin\theta} d\theta,$$

где $\psi_1(\nu)$ — неизвестная постоянная. Интегрированием получаем

$$\psi_1 = \psi_1(\nu) - \frac{q_1 \sin^2\alpha}{2H}\left(\frac{\cos\nu}{\sin^2\nu} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}\right). \tag{10}$$

Таким образом, полученное решение (8), (9), (4), (10) содержит неизвестные постоянные $A, \nu, C = \psi_1(\nu)$.

2. *Решение в зоне текучести* $(\nu \le \theta \le \gamma)$. В этой зоне имеем условие Губера–Мизеса

$$\left(\sigma_{\varphi 2} - \sigma_{\theta 2}\right)^2 + 4\tau_{\theta\varphi 2}^2 = 4k^2, \tag{11}$$

где $k = \sigma_s / \sqrt{3}$. Отсюда

$$\sigma_{\varphi 2} - \sigma_{\theta 2} = 2\sqrt{k^2 - \tau_{\theta\varphi 2}^2}. \tag{12}$$

Из второго уравнения (7) путем интегрирования и использования условия непрерывности $\tau_{\theta\varphi}$ при $\theta = \nu$ будем иметь

$$\tau_{\varphi\theta 2} = \tau(\theta), \qquad \nu \le \theta \le \gamma. \tag{13}$$

Интегрируя далее, из первого уравнения (7) с учетом (12) и (13) получим

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_{\theta 2}(\nu) + 2\int_{\nu}^{\theta} \sqrt{k^2 - \tau^2}\operatorname{ctg}\theta d\theta.$$

Используя условие непрерывности $\sigma_{\theta 1}(\nu) = \sigma_{\theta 2}(\nu)$, получим

$$\sigma_{\theta 2} = -p_1 + 2HAB(\nu) + kN(\theta, \nu), \tag{14}$$

где

$$B(\nu) = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos\nu}{\sin^2\nu} - \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

$$N(\theta, \nu) = 2\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} + \ln\frac{1 + \sqrt{1 - q^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\theta}}}{1 + \sqrt{1 - q^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\nu}}} -$$

$$-\sqrt{1 - q^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\theta}} + \sqrt{1 - q^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\nu}}, \quad q = q_1 / k.$$

На поверхности $\theta = \nu$ имеет место условие Губера–Мизеса

$$\left(\sigma_{\varphi 1} - \sigma_{\theta 1}\right)^2 + 4\tau_{\theta\varphi 1}^2 = 4k^2, \qquad \text{при} \qquad \theta = \nu$$

Или же

$$4A^2h^2\frac{\cos^4\nu}{\sin^4\nu} + q^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\nu} = 1, \tag{15}$$

причем $h = H/k$. Из зависимостей (12) и (6) для $\tau_{\theta\varphi 2}$ находим

$$\psi_2 = \psi_2(\nu) + 2A\int_{\nu}^{\theta}\frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}d\theta.$$

3. *Решение в упругой зоне* ($\gamma \le \theta \le \beta$). В упругой области принимаем в (6) $f = G$; будем иметь

$$\sigma_{\varphi 3} = \sigma_{\theta 3} + 4AG\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \sigma_{r3} = \sigma_{\theta 3} + 2AG\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$
$$\tau_{\theta\varphi 3} = q_2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} = \tau, \quad q_2\sin^2\beta = q_1\sin^2\alpha, \quad \gamma \le \theta \le \beta. \tag{16}$$

Здесь использованы граничные условия для $\tau_{\theta\varphi 3}$ на поверхностях $\theta = \beta$ и $\theta = \gamma$. Интегрируя первое уравнение (7) с использованием выражения $\sigma_{\varphi 3} - \sigma_{\theta 3}$ из (16), находим

$$\sigma_{\theta 3} = -p_2 + 2AG\left(\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right), \quad \gamma \le \theta \le \beta. \tag{17}$$

Здесь учтено граничное условие на поверхности $\theta = \beta$. Далее используя условие непрерывности напряжений $\sigma_{\theta 3}(\gamma) = \sigma_{\theta 2}(\gamma)$, получаем

$$p = 2A[hB(\nu) + gD(\gamma)] + N(\gamma, \nu), \tag{18}$$

где

$$D(\gamma) = \frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma} - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} - \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

$$p = \left(p_1 - p_2\right)/k, \quad h = H/k, \quad g = G/k.$$

Из (18) определяем

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{P - N(\gamma, \nu)}{hB(\nu) + gD(\gamma)}. \tag{19}$$

На граничной поверхности между упругой и пластической зонами имеем условие пластичности Губера–Мизеса

$$\left(\sigma_{\varphi 3}-\sigma_{\theta 3}\right)^2+4\tau_{\theta 3}^2=4k^2, \text{ при } \theta=\gamma$$

Отсюда согласно (16), (19) находим

$$\frac{(P-N)^2\mu^2}{(B+\mu D)^2}\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}+q^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\gamma}=1, \tag{20}$$

где $\mu=G/H$; $q=q_1/k$. Далее, из (15) и (19) получаем

$$\frac{(P-N)^2}{(B+\mu D)^2}\frac{\cos^2\nu}{\sin^4\nu}+q^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\nu}=1. \tag{21}$$

Система уравнений (20)–(21) определяет неизвестные постоянные ν и γ в зависимости от p и q. В частности, когда $q=0$, из (20)–(21) находим

$$\cos\gamma=\sqrt{1+\frac{\mu^2}{4}\cdot\frac{\sin^4\nu}{\cos^2\nu}}-\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\sin^2\nu}{\cos\nu}$$

$$p=2\ln\frac{\sin\gamma}{\sin\nu}+\frac{\sin^2\gamma}{\mu\cos\gamma}[B(\nu)+\mu D(\gamma)].$$

Задавая значения ν, находим значения γ, а затем и p.

4. *Второе предельное давление*. Пусть на внутренней конической поверхности материал переходит в стадию временного сопротивления. Принимаем, что интенсивность напряжения на этой поверхности достигает критического значения, т.е.

$$\sigma_0(\alpha)/k=\sigma_*.$$

Принимая в (19)–(21) $\nu=\nu_*$ и $\gamma=\gamma_*$, из условия Губера–Мизеса имеем

$$4h^2A_*^2\frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}+q_*^2=\sigma_*^2,$$

откуда согласно (19) находим второе предельное давление $p=p_*$,

$$p_*=N_*+\left(B_*+\mu D_*\right)\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{\sigma_*^2-q_*^2}. \tag{22}$$

Здесь N_*, B_*, D_* — значения этих параметров при $\nu=\nu_*$ и $\gamma=\gamma_*$.

Система уравнений (20)–(21) в этом предельном состоянии примет следующий вид:

$$\left(\sigma_*^2-q_*^2\right)\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\cos^2\nu_*}{\sin^4\nu_*}+q_*^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\nu_*}=1,$$

$$\mu^2\left(\sigma_*^2 - q_*^2\right)\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\cos^2\gamma_*}{\sin^4\gamma_*} + q_*^2\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\gamma_*} = 1.$$

В частности, когда $q = 0$, находим

$$\frac{\sin^2\gamma_*}{\cos\gamma_*} = \mu\sigma_*\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, \quad \frac{\sin^2\nu_*}{\cos\nu_*} = \sigma_*\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Отсюда получаем

$$\nu_* = \arccos\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_*^2}{4}\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}} - \frac{\sigma_*}{2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

$$\gamma_* = \arccos\left(\sqrt{1 + \mu^2\frac{\sigma_*^2}{4}\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}} - \mu\frac{\sigma_*}{2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right).$$

Значение второго предельного давления будет

$$p_* = 2\ln\frac{\sin\gamma_*}{\sin\nu_*} + \sigma_*\left(B_* + \mu D_*\right)\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha},$$

где

$$B_* = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sigma_*}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

$$D_* = \frac{1}{\mu\sigma_*}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} - \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_*}{2}}.$$

Предельное давление зависит от σ_* и $\mu = G / H$.

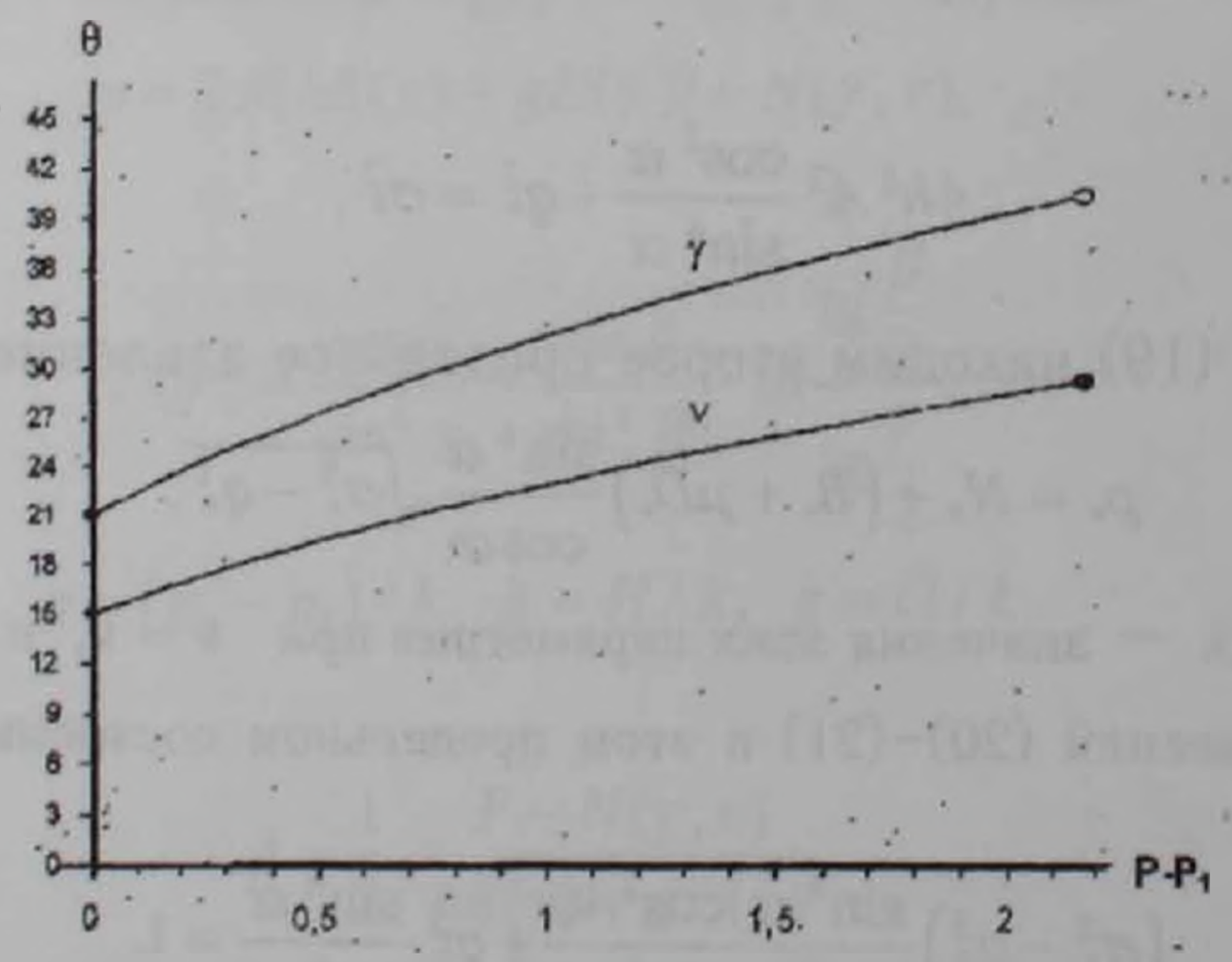

Рис.3.

Для значений параметров

$\alpha = 15^{\circ}$, $\beta = 45^{o}$, $\mu = 2$, $\sigma_{\bullet} = 4$ на рис.3 построены кривые γ и ν в зависимости от роста давления p. Когда с внутренней поверхности трубы начинается распространение зоны упрочнения, $p_1 = 1{,}35$, а в предельном состоянии, когда исчерпывается несущая способность трубы, $p_{\bullet} = 3{,}5$. Соответственно $\nu_{\bullet} = 29{,}44^{\circ}$ и $\gamma_{\bullet} = 40{,}5^{\circ}$.

Институт механики НАН Армении

Ա. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, *Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս* **Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ**

Պլաստիկության գոտիները կոնական խողովակում

Շատ մետաղական նյութերում ձգման դիագրամաներում հոսունության միջակայքին հաջորդում են ամրապնդման գոտիները, որտեղ նյութերը հանդես են բերում պլաստիկական դեֆորմացիաներին դիմադրելու ամրության զգալի պաշարներ: Ուսումնասիրվում է կոնական եռաստապատ խողովակի լարվածային վիճակը նորմալ և շոշափող ուժերի ազդեցության տակ, երբ նյութն օժտված է հետհոսունության գծային ամրապնդումով: Ընդունվում է, որ կոնական խողովակում առաջանում են ամրապնդման, հոսունության և առաձգական գոտիներ, որոնք տարածվում են արտաքին ուժերի աճման հետ միասին: Որոշվում է երկրորդ սահմանային ճնշումը, որի դեպքում խողովակի ներքին մակերևույթում առաջանում են ժամանակավոր դիմադրությանը համապատասխան լարումներ:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В.В.Клюшников*, в сб. Статическая и динамическая прочность элементов машиностроительных конструкций, М., ВЗМИ, 1986. [2] *М.А.Задоян*, Изв. НАН Армении. Механика, т.50, №3-4(1997). [3] *Д.Д.Ивлев*, Теория идеальной пластичности, М., Наука, 1966. [4] *М.А.Задоян*, Пространственные задачи теории пластичности, М., Наука, 1992.