

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:534.1

А. А. Баблоян, С. А. Мелкумян

Плоская задача электроупругости пьезокерамического клина

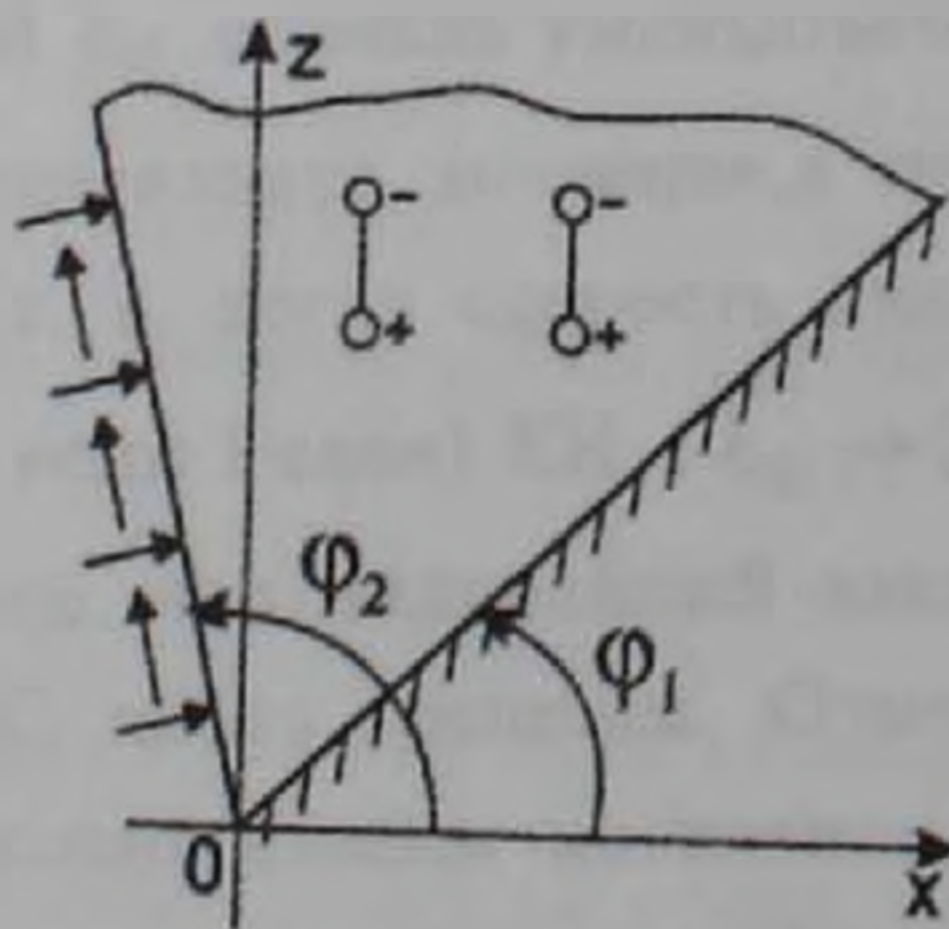
(Представлено академиком НАН Армении В.С.Саркисяном 22/IV 1998)

В работе рассматривается плоское деформированное состояние клина из упругого пьезокерамического материала. Одна граница клина жестко закреплена, а на другую действует произвольно распределенная нагрузка. На заделанной границе задан электрический потенциал, а на нагруженной границе – нормальный компонент электрической индукции.

Таким образом, граничные условия для рассматриваемой задачи будут:

$$\begin{aligned} U_r(r, \varphi_1) = V_\varphi(r, \varphi_1) = 0; \quad \Psi(r, \varphi_1) = \Psi_0(r) \quad (0 < r < \infty) \\ \sigma_\varphi(r, \varphi_2) = \sigma(r); \quad \tau_{r\varphi}(r, \varphi_2) = \tau(r); \quad D_\varphi(r, \varphi_2) = D_0(r) \quad (0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что вектор предварительной поляризации материала в любой его точке имеет постоянное направление и с биссектрисой клина составляет произвольный угол. Такой клин можно получить из поляризованной бесконечной плоскости, отрезав от нее клин любой ориентации и с любым углом раскрытия (рис.).



Введем полярные (r, φ) и обобщенные полярные (ρ, θ) координатные системы

$$x = r \cos \varphi = \rho \cos \theta, \quad az = ar \sin \varphi = \rho \sin \theta$$

и ищем решение уравнений равновесия теории электроупругости ⁽¹⁾ для плоского деформированного состояния в координатной системе (ρ, θ) в виде (2-6):

$$\begin{aligned} U_x &= \gamma_1(\alpha) \lambda^{-1} \Phi'(\lambda, \theta) \rho^{-\lambda}; \quad U_z = \gamma_2(\alpha) \Phi(\lambda, \theta) \rho^{-\lambda}; \\ \Psi &= -\Phi(\lambda, \theta) \rho^{-\lambda}; \quad \Phi'' + k^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь считалось, что направление вектора поляризации в любой точке материала совпадает с положительным направлением осей oz , U_x, U_y, U_z — проекции вектора перемещения $\bar{U}$ в декартовой системе координат, Ψ — потенциал электрического поля, а λ — произвольный комплексный параметр.

Рассматривается случай, когда $U_y = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = 0$.

Подставляя выражение (2) в уравнения равновесия статики ⁽¹⁾ для определения неизвестных $(\gamma_1, \gamma_2, 1)$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (C_{11}^E - \alpha^2 C_{44}^E) \gamma_1(\alpha) - (C_{13}^E + C_{44}^E) \alpha \gamma_2(\alpha) + (e_{31} + e_{15}) \alpha &= 0; \\ (C_{13}^E + C_{44}^E) \alpha \gamma_1(\alpha) + (C_{44}^E - \alpha^2 C_{33}^E) \gamma_2(\alpha) - (e_{15} - \alpha^2 e_{33}) &= 0; \\ (e_{31} + e_{15}) \alpha \gamma_1(\alpha) + (e_{15} - \alpha^2 e_{33}) \gamma_2(\alpha) + (\varepsilon_{11}^S - \alpha^2 \varepsilon_{33}^S) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда функции $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$ определяются единственным образом, а параметр α определяется из условия равенства нулю детерминанта системы (3).

Нетрудно заметить, что это уравнение имеет только три корня $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, для которых $\operatorname{Re} \alpha_p > 0$. Доказывается, что один из корней (α_0) всегда действителен, так как $\alpha_0^2 > 0$.

Таким образом, на основании вышесказанного, общее решение уравнений равновесия теории электроупругости при плоском деформированном состоянии для клиновидной области можно представить в виде ^(2,3):

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \sum_{p=0}^2 \gamma_1(\alpha_p) \lambda^{-1} \Phi'_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda} d\lambda; \\ U_z &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \sum_{p=0}^2 \gamma_2(\alpha_p) \Phi_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda} d\lambda; \\ \Psi &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \sum_{p=0}^2 \Phi_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda} d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\operatorname{Re} \theta_p$ и φ находятся в одной и той же четвертьплоскости:

$$\begin{aligned} \rho_p &= r b_p(\varphi), \quad \operatorname{tg} \theta_p = \alpha_p \operatorname{tg} \varphi, \quad (p=0, 1, 2) \\ b_p^2(\varphi) &= \cos^2 \varphi + \alpha_p^2 \sin^2 \varphi, \quad \operatorname{Re} b_p(\varphi) > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Пользуясь уравнениями состояния (1) и формулами поворота координатных осей для напряжений и перемещений (7), на основании выражений (4) получим:

$$\begin{aligned}
 U_r &= U_x \cos \varphi + U_z \sin \varphi; \quad U_\varphi = -U_x \sin \varphi + U_z \cos \varphi; \\
 \sigma_\varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \alpha_p^{-1} \gamma_3(\alpha_p) [\Phi'_p \cos \theta_p + \lambda \Phi_p \sin \theta_p] b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \\
 \sigma_r + \sigma_\varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \frac{\alpha_p^2 - 1}{\alpha_p} \gamma_3(\alpha_p) [\lambda \Phi_p \sin \theta_p - \Phi'_p \cos \theta_p] b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \\
 \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_3(\alpha_p) \left[\Phi'_p \frac{\sin \theta_p}{\alpha_p^2} - \lambda \Phi_p \cos \theta_p \right] b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \quad (6) \\
 D_\varphi &= -\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) \Phi'_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda+1}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda; \\
 D_r &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{L, p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) \left[\left(\frac{\alpha_p^2 + 1}{2\alpha_p} + \frac{\alpha_p^2 - 1}{2\alpha_p} \cos 2\theta_p \right) \lambda \Phi_p + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_p^2 - 1}{2\alpha_p} \Phi'_p(\lambda, \theta_p) \sin 2\theta_p \right] b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda,
 \end{aligned}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
 \gamma_3(\alpha) &= C_{44}^E \alpha \gamma_1(\alpha) + C_{44}^E \gamma_2(\alpha) - e_{15} = C_{11}^E \alpha^{-1} \gamma_1(\alpha) - C_{13}^E \gamma_2(\alpha) + e_{31} = \\
 &= -\alpha [C_{13}^E \gamma_1(\alpha) - C_{33}^E \alpha \gamma_2(\alpha) + \alpha e_{33}]; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_4(\alpha) = e_{31} \gamma_1(\alpha) - e_{33} \alpha \gamma_2(\alpha) - \alpha \varepsilon_{33}^S = -\alpha^{-1} [e_{15} \alpha \gamma_1(\alpha) + e_{15} \gamma_2(\alpha) + \varepsilon_{11}^S].$$

Пусть угол раствора пьезокерамического клина — φ_0 , а вектор предварительной поляризации с биссектрисой клина составляет угол $\tilde{\varphi}_0$.

В этом случае углы φ_1 и φ_2 , входящие в граничные условия (1), определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 2\varphi_1 &= \pi - \varphi_0 - 2\tilde{\varphi}_0, \quad 2\varphi_2 = \pi + \varphi_0 - 2\tilde{\varphi}_0, \\
 0 < \varphi_0 &\leq 2\pi, \quad 0 \leq \tilde{\varphi}_0 \leq \pi. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Представим решение уравнения (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \Phi_p(\lambda, \theta_p) &= A_p \sin \lambda(\theta_p - \theta_{p1}) + B_p \cos \lambda(\theta_p - \theta_{p1}) \\
 (\varphi_1 &\leq \varphi \leq \varphi_2, \quad p = 0, 1, 2), \quad (9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sin \theta_{pk} &= \alpha_p b_p^{-1}(\varphi_k) \sin(\varphi_k), \quad \cos \theta_{pk} = b_p^{-1}(\varphi_k) \cos(\varphi_k), \\ \operatorname{tg} \theta_{pk} &= \alpha_p \operatorname{tg} \varphi_k, \quad \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \theta_{p0} = \theta_{p2} - \theta_{p1}, \quad (p = 0, 1, 2; k = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что пара $\operatorname{Re} \theta_{pk}$ и φ_k , так же как и пара $\operatorname{Re} \theta_p$ и φ обязательно должны находиться в одном и том же квадранте.

Удовлетворяя граничным условиям (1) и применяя обратное преобразование Мелина к полученным соотношениям для определения неизвестных функций $A_p(\lambda)$ и $B_p(\lambda)$, входящих в (9), получим систему из шести уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^2 \alpha_p^{-1} \gamma_3(\alpha_p) [A_p \cos(\lambda \theta_{p0} - \theta_{p2}) - B_p \sin(\lambda \theta_{p0} - \theta_{p2})] b_p^{-\lambda+1}(\varphi_2) &= \tilde{\sigma}(\lambda); \\ \sum_{p=0}^2 \gamma_3(\alpha_p) [A_p (\sin \lambda \theta_{p0} \cos \lambda \theta_{p2} - \alpha_p^{-2} \cos \lambda \theta_{p0} \sin \theta_{p2}) + \\ + B_p (\cos \lambda \theta_{p0} \cos \lambda \theta_{p2} + \alpha_p^{-2} \sin \lambda \theta_{p0} \sin \theta_{p2})] b_p^{-\lambda+1}(\varphi_2) &= \tilde{\sigma}(\lambda); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) (A_p \cos \lambda \theta_{p0} - B_p \sin \lambda \theta_{p0}) b_p^{-\lambda}(\varphi_2) = -\tilde{D}_0(\lambda);$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_1(\alpha_p) A_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = 0; \quad \sum_{p=0}^2 B_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = -\tilde{\Psi}_0(\lambda);$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_2(\alpha_p) B_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = 0, \quad (-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0),$$

где введены следующие обозначения:

$$\lambda \tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^{\infty} \sigma(r) r^{\lambda} dr, \quad \lambda \tilde{\tau}(\lambda) = \int_0^{\infty} \tau(r) r^{\lambda} dr, \quad (12)$$

$$\lambda \tilde{D}_0(\lambda) = \int_0^{\infty} D_0(r) r^{\lambda} dr, \quad \tilde{\Psi}(\lambda) = \int_0^{\infty} \Psi_0(r) r^{\lambda-1} dr,$$

Здесь предполагалось, что граничные функции (1) абсолютно интегрируемы.

В частном случае, когда биссектриса клина совпадает с осями ox или oy :

$$\varphi_1 = \frac{k\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\varphi_0}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad (13)$$

введением новых неизвестных функций

$$X_p(\lambda) = A_p(\lambda) b_p^{-\lambda}(\varphi_1), \quad Y_p(\lambda) = B_p(\lambda) b_p^{-\lambda}(\varphi_1), \quad (p = 0, 1, 2) \quad (14)$$

систему (11) можно привести к более удобному для решения виду.

Те же обозначения (14) можно использовать и в тех случаях, когда клин представляет собой полуплоскость ($\varphi_0 = \theta_{p0} = \pi$) или плоскость с полубесконечной трещиной ($\varphi_0 = \theta_{p0} = 2\pi$).

В теории электроупругости часто бывает необходимым совместно с внутренней (для материальной области) задачей рассматривать также внешнюю (для нематериальной области) задачу, в которой неизвестной функцией является только потенциал электрического поля (1).

Согласно граничным условиям (1), для нашего случая внешняя задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \varphi^2} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right|_{\varphi=\varphi_2} = r D_0(r), \quad \Psi_0(r, 2\pi + \varphi_1) = \Psi_0(r) \quad (0 \leq r < \infty, \varphi_2 \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi_1).$$
(15)

Используя обозначения (12), решение задачи (15) представляется в виде интеграла Мелина (5)

$$\Psi_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\tilde{\Psi}_0(\lambda) \cos \lambda(\varphi - \varphi_2) - \right.$$

$$\left. - \tilde{D}_0(\lambda) \sin \lambda(2\pi + \varphi_1 - \varphi) \right] \frac{r^{-\lambda} d\lambda}{\cos \lambda(2\pi - \varphi_0)}.$$
(16)

Используя условия непрерывности электрической индукции и потенциал электрического поля на границах материального клина, на основании решения (4), (6) и (16) для определения неизвестных функций $\tilde{\Psi}_0(\lambda)$ и $\tilde{D}_0(\lambda)$ получим следующие уравнения:

$$\sum_{p=0}^2 (A_p \sin \lambda \theta_{p0} + B_p \cos \lambda \theta_{p0}) b_p^{-\lambda}(\varphi_2) = \frac{\tilde{D}_0(\lambda) \sin \lambda(2\pi - \varphi_0) - \tilde{\Psi}_0(\lambda)}{\cos \lambda(2\pi - \varphi_0)};$$

$$\sum_{p=0}^2 \gamma_4(\alpha_p) A_p b_p^{-\lambda}(\varphi_1) = \varepsilon_0 \frac{\tilde{\Psi}_0(\lambda) \sin \lambda(2\pi - \varphi_0) - \tilde{D}_0(\lambda)}{\cos \lambda(2\pi - \varphi_0)},$$
(17)

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Таким образом, задача о пьезокерамическом клине с учетом внешней (нематериальной) среды приводится к совместному решению систем уравнений (11) и (17) относительно восьми неизвестных функций $\tilde{\Psi}_0, \tilde{D}_0, A_p$ и B_p ($p = 0, 1, 2$). Та же задача, без учета внешней среды, приводится только к решению системы (11), где необходимо принять $\tilde{\Psi}_0 = \tilde{D}_0 = 0$.

В конце отметим, что поведение напряжений на вершине клина, без учета внешней среды, определяется корнями основного детерминанта системы

$\Delta_0(\lambda)$. При учете внешней среды поведение напряжений на малой окрестности вершины клина определяется уже корнями основного детерминанта совместных систем уравнений (11) и (17) – $\Delta(\lambda)$. После решения систем уравнений (11) и (17) компоненты электрического и механического полей можно получить из формул (16), если к ним применить теорию вычетов.

Разработаны алгоритмы определения корней целых функций $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$, а также вычисленных интегралов, входящих в формулы (6), с использованием при этом системы (11) и (17).

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ա. Յ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼԻՔՈՒՄՅԱՆ

Էլեկտրատառձգականության տեսության հարթ խնդիրը պիեզակերամիկական սեպի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է նախապես բեռնացված պիեզակերամիկական առաձգական նյութից պատրաստված անվերջ սեպի հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ նրա եզրերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս եզրի վրա ազդում է կամայական ձևով բաշխված արտաքին բեռ: Ամրակցված եզրի վրա հայտնի է էլեկտրական պոտենցիալի արժեքը, իսկ բեռնավորված եզրի վրա տրված է էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչը: Ենթադրվում է, որ նյութի նախնական բեռնացման վեկտորը նրա յուրաքանչյուր կետում ունի հաստատուն ուղղություն և սեպի կիսորդի հետ կազմում է կամայական անկյուն:

Միաժամանակ դիտարկվում է նաև արտաքին (ոչ նյութական միջավայրի համար) խճնդիրը:

Խնդրի լուծումը փնտրված է Մելինի ինտեգրալների տեսքով: Բավարարելով խնդրի եզրային, ինչպես նաև սեպի եզրային էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի ու էլեկտրական ինդուկցիայի անընդհատության պայմաններին և օգտվելով Մելինի հակադարձ ձևափոխության բանաձևից, խնդիրը բերվում է հանրահաշվական ութ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Սեպի գազաթում լարումների վարքը որոշվում է համակարգի հիմնական դետերմինանտի մոդուլով ամենափոքր արմատների արժեքներով:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, Н.А.Шульга, Электроупругость, Киев, Наукова думка, 1989.
- ² А.А.Баблоян, ДАН АрмССР, т.65, №5 (1977).
- ³ С.А.Мелкумян, в кн.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем, Изд. ЕГУ, с.226-229, 1997.
- ⁴ В.С.Сарксян, Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд. ЕГУ, 1976.
- ⁵ А.А.Баблоян, С.А.Мелкумян, Г.Н.Шахвердян, в кн.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем, Изд. ЕГУ, с.201-204, 1997.
- ⁶ А.А.Баблоян, Л.М.Варданян, С.М.Саакян, в кн.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем, Изд. ЕГУ, с.198-200, 1997.
- ⁷ С.Г.Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, М., Наука, 1977.