

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

А. М. Хачатрян

Об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при  
нежестком контакте слоев

(Представлено академиком НАН Армении Л. А. Агаловяном 22/X 1998)

Асимптотическим методом из уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы значения напряжений, а на плоскости контакта – закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений.

1. При расчете слоистых тонкостенных тел чаще всего используют гипотезу о недеформируемых нормалях для всего пакета в целом. В последующем были предложены другие гипотезы и различные уточненные теории, обзор которых можно найти, например, в (1,2).

В работе (3) методом асимптотического интегрирования построена приближенная теория изгиба изотропных пластин. В (4-6) асимптотическим методом исследованы напряженно-деформированные состояния однослойных и многослойных пластин, материал которых обладает анизотропией самого общего вида. В (7) выведены уравнения для расчета анизотропной двухслойной полосы-балки, когда контакт между слоями неполный.

В данной работе асимптотический метод применяется для вывода двумерных уравнений анизотропной двухслойной пластинки при нежестком контакте слоев.

Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют толщину  $h_k$ , коэффициенты упругости  $a_{ij}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ). Общая толщина пластинки –  $2h$ . Плоскость отсчета  $Oxy$  совпадает с плоскостью раздела слоев, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Введем безразмерные переменные  $\xi = x/l$ ,  $\eta = y/l$ ,  $\zeta = z/h$  и безразмерные перемещения  $U^{(k)} = u^{(k)}/l$ ,  $V^{(k)} = v^{(k)}/l$ ,  $W^{(k)} = w^{(k)}/l$ , где  $l$  – характерный



тангенциальный размер пластинки ( $h \ll l$ ). Условия на лицевых плоскостях  $z = h_1$  задаются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= l/h X^+(x, y), \sigma_{yz} = l/h Y^+(x, y), \sigma_z = Z^+(x, y), \quad z = h_1, \\ \sigma_{xz} &= -l/h X^-(x, y), \sigma_{yz} = -l/h Y^-(x, y), \sigma_z = -Z^-(x, y), \quad z = h_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

На плоскости раздела  $z = 0$  заданы условия неполного контакта

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} &= \sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, w^{(1)} = w^{(2)}, \\ u^{(2)} - u^{(1)} &= f_1(x, y), v^{(2)} - v^{(1)} = f_2(x, y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В зависимости от выбранной модели контакта функции  $f_k(x, y)$  считаются заданными.

Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта слоев (1.2). Условия на боковой поверхности пластинки пока не конкретизируются.

Решение внутренней задачи ищется в виде (3-5)

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \quad (1.3)$$

где  $Q^{(k)}$  – любое из компонентов тензора напряжений или безразмерных перемещений  $k$ -го слоя,  $\varepsilon = h/l$  – малый параметр. Непротиворечивые значения  $q_k$  выбираются следующим образом (3-5):

$$\begin{aligned} q_k &= 2 \quad \text{для} \quad \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, \quad q_k = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_z^{(k)} \\ q_k &= 3 \quad \text{для} \quad W^{(k)}, \quad q_k = 1 \quad \text{для} \quad \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставив (1.3) в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения уравнения теории упругости анизотропного тела, с учетом (1.4) получим систему для определения  $Q^{(k,s)}$ . Решив указанную систему, получим

$$\begin{aligned} W^{(k,s)} &= w^{(k,s)}(\xi, \eta) + w^{*(k,s)}, \\ U^{(k,s)} &= -\zeta \frac{\partial w^{(k,s)}}{\partial \xi} + u^{(k,s)}(\xi, \eta) + u^{*(k,s)} \quad (u, v), \\ \sigma_x^{(k,s)} &= \zeta \tau_{x1}^{(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)} \quad (x, y), \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= \zeta \tau_{xy1}^{(k,s)} + \tau_{xy0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \\ \sigma_{xz}^{(k,s)} &= 1/2 \zeta^2 \tau_{xz2}^{(k,s)} + \zeta \tau_{xz1}^{(k,s)} + \tau_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)} \quad (x, y), \\ \sigma_z^{(k,s)} &= 1/6 \zeta^3 \tau_{z3}^{(k,s)} + 1/2 \zeta^2 \tau_{z2}^{(k,s)} + \zeta \tau_{z1}^{(k,s)} + \tau_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где



$$\begin{aligned}
\tau_{x1}^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \chi_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \chi_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \tau^{(k,s)} \quad (x, y), \\
\tau_{xy1}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \chi_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \chi_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \tau^{(k,s)}, \\
\tau_{x0}^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{(k,s)} \quad (x, y), \\
\tau_{xy0}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{(k,s)}, \\
\tau_{xz(i+1)}^{(k,s)} &= -(\tau_{xi,\xi}^{(k,s)} + \tau_{xyi,\eta}^{(k,s)}) \quad i=0,1 \quad (x, y), \\
\tau_{zi(i+1)}^{(k,s)} &= -(\tau_{xzi,\xi}^{(k,s)} + \tau_{yzi,\eta}^{(k,s)}) \quad i=0,1,2, \\
\varepsilon_1^{(k,s)} &= u_{,\xi}^{(k,s)}, \varepsilon_2^{(k,s)} = v_{,\eta}^{(k,s)}, \omega^{(k,s)} = u_{,\eta}^{(k,s)} + v_{,\xi}^{(k,s)}, \\
\chi_1^{(k,s)} &= -w_{,\xi\xi}^{(k,s)}, \chi_2^{(k,s)} = -w_{,\eta\eta}^{(k,s)}, \tau^{(k,s)} = -2w_{,\xi\eta}^{(k,s)}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Коэффициенты  $B_y^{(k)}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(k)} &= (a_{22}^{(k)} a_{66}^{(k)} - (a_{26}^{(k)})^2) / \Omega_k, \quad (1,2), \quad B_{12}^{(k)} = (a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{66}^{(k)}) / \Omega_k, \\
B_{16}^{(k)} &= (a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{16}^{(k)} a_{22}^{(k)}) / \Omega_k, \quad (1,2), \quad B_{66}^{(k)} = (a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2) / \Omega_k \tag{1.7} \\
\Omega_k &= (a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2) a_{66}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{11}^{(k)} (a_{26}^{(k)})^2 - a_{22}^{(k)} (a_{16}^{(k)})^2.
\end{aligned}$$

Величины со звездочкой функции от  $\xi, \eta, \zeta$  и для каждого приближения  $s$  известны, если построены предыдущие приближения. Они приведены в работе (5).

Удовлетворив условиям контакта (1.2), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)}, \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(2,s)}, \\
u^{(2,s)} &= u^{(1,s)} + f_1^{(s)}(\xi, \eta), v^{(2,s)} = v^{(1,s)} + f_2^{(s)}(\xi, \eta),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$f_k^{(0)}(\xi, \eta) = f_k(l\xi, l\eta), \quad f_k^{(s)}(\xi, \eta) = 0 \quad s > 0.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), с учетом (1.8) получим следующую систему уравнений относительно неизвестных перемещений  $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}, w^{(s)}$ :

$$\begin{aligned}
&L_{11}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{13}(K_{ij})w^{(s)} + \\
&+ L_{11}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)} + L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(2)} = p_1^{(s)}, \\
&L_{12}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{22}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{23}(K_{ij})w^{(s)} + \\
&+ L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)} + L_{22}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(s)} = p_2^{(s)}, \\
&L_{13}(K_{ij})u^{(1,s)} + L_{23}(K_{ij})v^{(1,s)} + L_{33}(D_{ij})w^{(s)} + \\
&+ L_{13}(K_{ij}^{(2)})f_1^{(s)} + L_{23}(K_{ij}^{(2)})f_2^{(s)} = q^{(s)},
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где



$$\begin{aligned}
p_1^{(s)} &= -(X^{+(s)} + X^{-(s)}) + \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\zeta_2), \\
p_2^{(s)} &= -(Y^{+(s)} + Y^{-(s)}) + \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\zeta_2), \\
q^{(s)} &= Z^{+(s)} + Z^{-(s)} + \zeta_1 \frac{\partial X^{+(s)}}{\partial \xi} + \zeta_2 \frac{\partial X^{-(s)}}{\partial \xi} + \zeta_1 \frac{\partial Y^{+(s)}}{\partial \eta} + \\
&+ \zeta_2 \frac{\partial Y^{-(s)}}{\partial \eta} - \zeta_1 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \xi} + \zeta_2 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{\partial \xi} - \zeta_1 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \eta} + \\
&+ \zeta_2 \frac{\partial \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{\partial \eta} - \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1) + \sigma_z^{*(2,s)}(\zeta_2) \\
X^{\pm(0)} &= X^{\pm}, Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, Z^{\pm(0)} = Z^{\pm}, X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = Z^{\pm(s)} = 0, s > 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Операторы  $L_\nu(B_\nu^{(k)})$  совпадают с известными операторами из классической теории (2). Жесткости определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{(k)} &= (-1)^{k+1} \zeta_k B_{ij}^{(k)}, K_{ij}^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \zeta_k^2 B_{ij}^{(k)}, D_{ij}^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{3} \zeta_k^3 B_{ij}^{(k)}, \\
C_{ij} &= C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)}, K_{ij} = K_{ij}^{(1)} + K_{ij}^{(2)}, D_{ij} = D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Из граничных условий (1.1) определяются также неизвестные функции  $\tau_{xz0}^{(k,s)}, \tau_{yz0}^{(k,s)}, \tau_{z0}^{(k,s)}$

2. Остановимся более подробно на модели нежесткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем: принимается, что существует тонкий слой толщиной  $h_0$  с исчезающе малой сдвиговой жесткостью  $G_0$  между контактирующими средами. Отношение

$$\chi = \lim_{\substack{h_0 \rightarrow 0 \\ G_0 \rightarrow 0}} \frac{h_0}{G_0} \tag{2.1}$$

может принимать любое значение от 0 до  $\infty$ . Предельному случаю  $\chi = 0$  соответствует жесткий контакт, другому предельному случаю  $\chi \rightarrow \infty$  — скользящий контакт.

Для промежуточного состояния принимаются (7.9)

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi \frac{l}{h} \sigma_{xz}(z=0), v^{(2)} - v^{(1)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_{yz}(z=0). \tag{2.2}$$

Постоянные  $\chi_1, \chi_2$  имеют размерность  $\text{м}^3/\text{Н}$  и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии  $z = \text{const}$  и изотропных материалов имеет место соотношение  $\chi_1 = \chi_2$ .

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда из (1.2) и (2.2) следует

$$f_1^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_1 \tau_{xz0}^{(k,s)}, f_2^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_2 \tau_{yz0}^{(k,s)}. \tag{2.3}$$



Неизвестные функции  $\tau_{x0}^{(k,s)}, \tau_{y0}^{(k,s)}$  определяются из граничных условий (1.1) при помощи формул (1.5), (1.6). После определения  $\tau_{x0}^{(k,s)}, \tau_{y0}^{(k,s)}$  будут определяться также функции  $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$ . Подставив значения  $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$  в (1.9), получим

$$\begin{aligned} & \left[ L_{11}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) \right] u^{(1,s)} + \\ & + \left[ L_{12}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right] v^{(1,s)} + \\ & + \left[ L_{13}(K_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) L_{13}(K_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{23}(K_{ij}^{(1)}) \right] w^{(s)} = \overline{p_1}^{(s)}, \\ & \left[ L_{12}(C_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) \right] u^{(1,s)} + \\ & + \left[ L_{22}(C_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right] v^{(1,s)} + \\ & + \left[ L_{23}(K_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) L_{13}(K_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) L_{23}(K_{ij}^{(1)}) \right] w^{(s)} = \overline{p_2}^{(s)}, \\ & \left[ L_{13}(K_{ij}) + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) \right] u^{(1,s)} + \\ & + \left[ L_{23}(K_{ij}) + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right] v^{(1,s)} + \\ & + \left[ L_{33}(D_{ij}) + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) L_{13}(K_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) L_{23}(K_{ij}^{(1)}) \right] w^{(s)} = \overline{q}^{(s)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{p_1}^{(s)} &= p_1^{(s)} + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) (-X^{+(s)} + \sigma_{xz}^{(1,s)}(\zeta_1)) + \\ &+ \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) (-Y^{+(s)} + \sigma_{yz}^{(1,s)}(\zeta_1)), \\ \overline{p_2}^{(s)} &= p_2^{(s)} + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) (-X^{+(s)} + \sigma_{xz}^{(1,s)}(\zeta_1)) + \\ &+ \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)}) (-Y^{+(s)} + \sigma_{yz}^{(1,s)}(\zeta_1)), \\ \overline{q}^{(s)} &= q^{(s)} + \chi_1 L_{13}(K_{ij}^{(2)}) (-X^{+(s)} + \sigma_{xz}^{(1,s)}(\zeta_1)) + \\ &+ \chi_2 L_{23}(K_{ij}^{(2)}) (-Y^{+(s)} + \sigma_{yz}^{(1,s)}(\zeta_1)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, q^{(s)}$  определяются по формулам (1.10).

Если  $\chi_1 = \chi_2 = 0$ , будем иметь полный контакт. Тогда системы уравнений (1.9) и (2.4) совпадают с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин (2).

В частном случае, когда  $h_1 = h_2 = h$ , продифференцировав первое уравнение (2.4) по  $\xi$ , а второе — по  $\eta$ , умножив оба уравнения на  $h/2$  и складывая с третьим уравнением той же системы, получим

$$L_{33}(D_{ij}) w^{(s)} = 4 \overline{q}^{(s)} + 2h \left( \frac{\partial \overline{p_1}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{p_2}^{(s)}}{\partial \eta} \right). \quad (2.6)$$



После определения  $w^{(j)}$  из системы (2.4) для определения тангенциальных перемещений получим систему, которая равносильна одному уравнению восьмого порядка. Следовательно, система уравнений (2.4) равносильна одному уравнению двенадцатого порядка и в каждом торце необходимо удовлетворять шести граничным условиям.

Вопрос удовлетворения граничным условиям – предмет отдельного исследования.

Институт механики НАН Армении

## Ա Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

### Տերտերի ոչ կոշտ կոնտակտի պայմաններում երկչերտ անիզոտրոպ սալի հավասարումների մասին

Առաձգականության տեսության տարածական խնդրի հավասարումներից ասիմպտոտիկ մեթոդով դուրս են բերված երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկչերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկի համար, երբ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են լարումների արժեքները, իսկ կոնտակտի հարթության վրա՝ տանգենցիալ տեղափոխությունների տարրերության թուփի բաշխման օրենքը: Ստացված հավասարումները համեմատված են դասական տեսության հավասարումների հետ: Ցույց է տրված, որ այդ հավասարումներն ընդհանուր դեպքում իրենց կարգով տարրերվում են շերտավոր սալի դասական տեսության հավասարումներից: Նշված է այն մասնավոր դեպքը, երբ դրանք համընկնում են:

## ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> С.Г.Лехницкий, Анизотропные пластинки, М., Гостехиздат, 1957. <sup>2</sup> С.А.Амбарцумян, Теория анизотропных пластин, М., Наука, 1987. <sup>3</sup> А.Л.Гольденвейзер, ПММ, т.26, вып.4 (1962). <sup>4</sup> Л.А.Агаловян, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек., М., Наука, 1997. <sup>5</sup> Л.А.Агаловян, Ю.М.Багдасарян, А.М.Хачатрян, Изв.НАН РА. Механика, т. 49, №3, с.10-22, 1996. <sup>6</sup> Л.А.Агаловян, Инж. журн. МТТ, №6, с.114-121 (1966). <sup>7</sup> Л.А.Агаловян, А.М.Хачатрян, Изв.НАН РА, Механика, т.50, №3-4, с.34-41, (1997). <sup>8</sup> А.А.Анисимов, С.Ю.Ермаков, Е.Н.Фролова и др., Физика земли, №11, с.37-43, 1993. <sup>9</sup> Композиционные материалы. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. Под ред. Н.А.Шульги и В.Т.Томашевского, Киев, ПТОО "А.С.К", 1997.