ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Л. А. Мовсисян

К моментной теории упругости для тонких пластин

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Саркисяном 8/V 1998)

Как всегда "возмутителем спокойствия" оказался С.А.Амбарцумян.

Казалось бы, интерес к несимметричной теории упругости давно уже отпал. И вот в последние годы им предложено несколько теорий изгиба пластин несимметричной теории упругости ([1,2]) (по нашим сведениям, еще некоторые находятся в печати).

1. В данной статье предлагается вариант сведения трехмерных задач моментной теории упругости к двумерным. В основу положена гипотеза прямых в обобщенном смысле. В конечном счете основными отличиями настоящей постановки от ([1,2]) являются:

а) первоначально независимыми величинами предполагаются углы поворота,

б) учитывается поперечное обжатие.

С предлагаемой точностью последнее обстоятельство приводит только к уточнению плоской задачи. По этим же соображениям здесь основное внимание сосредоточено на плоской задаче. Ради краткости изложение ведется для одномерной задачи (считается, что в направлении оси y пластинка простирается до бесконечности и от нее ничего не зависит).

Согласно предложенной схеме принимается

$$u_x = u(x,t) + z'u_1(x,t);$$
$$u_z = w(x,t) + z'w_1(x,t); \tag{1.1}$$
$$\omega_y = \omega(x,t) + z'\omega_1(x,t), \quad z' = \frac{2}{h}z.$$

Вычисляя по этим величинам компоненты деформаций, для необходимых здесь силовых и моментных напряжений ([3]) получим

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + z'\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + 2\frac{\lambda}{h}w_1;$$

$$\sigma_{13} = (\mu+\alpha)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + z'\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) + (\mu-\alpha)\frac{2}{h}u_1 + 2\alpha(\omega + z'\omega_1);$$

$$\sigma_{31} = (\mu+\alpha)\frac{2}{h}u_1 + (\mu-\alpha)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + z'\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - 2\alpha(\omega + z'\omega_1);$$

$$\sigma_{33} = (\lambda+2\mu)\frac{2}{h}w_1 + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + z'\frac{\partial u_1}{\partial x}\right); \tag{1.2}$$

$$\mu_{12} = (\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + z'\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right); \quad \mu_{32} = (\gamma+\varepsilon)\frac{2}{h}\omega_1.$$

При сведении трехмерных задач к двумерным третье уравнение движения интегрируется только по высоте. Здесь, помимо этого, есть необходимость интегрировать его и после умножения на z. В связи с этим появляются новые усилия и моменты, отсутствующие в классической постановке, например,

$$T_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dz, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}, \mu_{ij}) z dz. \tag{1.3}$$

Уравнениями движения в усилиях и моментах будут

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + (X_1 - X_2) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x} - T_{33} + \frac{h}{2}(Z_1 + Z_2) = \frac{\rho h^2}{6}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x} - M_{13} + M_{31} - Q_{32} + \frac{h}{2}(\mu_{32}^{(1)} + \mu_{32}^{(2)}) = \frac{Ih^2}{6}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + (Z_1 - Z_2) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{31} + \frac{h}{2}(X_1 + X_2) = \frac{\rho h^2}{6}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial x} - T_{13} + T_{31} + (\mu_{32}^{(1)} - \mu_{32}^{(2)}) = Ih\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Здесь

$$T_{11} = h(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + 2\lambda w_1;$$

$$T_{33} = h\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + 2(\lambda+2\mu)w_1;$$

$$T_{13} = 2(\mu-\alpha)u_1 + h(\mu+\alpha)\frac{\partial w}{\partial x} + 2\alpha h\omega;$$

$$T_{31} = (\mu+\alpha)u_1 + h(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x} - 2\alpha h\omega; \tag{1.6}$$

$$M_{11}=\frac{h^2}{6}(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x};\ M_{33}=\frac{h^2}{6}\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x};$$

$$M_{13}=\frac{h^2}{6}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial w_1}{\partial x}+2\alpha\omega_1\right];\ M_{31}=\frac{h^2}{6}\left[(\mu-\alpha)\frac{\partial w_1}{\partial x}-2\alpha\omega_1\right];$$

$$M_{12}=\frac{h^2}{6}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\omega_1}{\partial x};\ \ Q_{12}=h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\omega}{\partial x};\quad Q_{32}=2(\gamma+\varepsilon)\omega_1.$$

Система (1.4) описывает плоскую задачу, а (1.5) – изгиб.

Подставляя (1.6) в (1.4) и (1.5), получим уравнения движений в перемещениях. Так как нас, в основном, будет интересовать плоская задача, то приведем только эту систему:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{h}\lambda\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{1}{h}(X_1-X_2)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\begin{gathered}(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-\frac{6}{h}\left[\frac{2}{h}(\lambda+2\mu)w_1+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\\+2\alpha\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{3}{h}(Z_1+Z_2)=\rho\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2};\end{gathered}\tag{1.7}$$

$$(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}-2\alpha\frac{\partial\omega_1}{\partial x}-4\left[\alpha+\frac{3(\gamma+\varepsilon)}{h^2}\right]\omega_1+\frac{3}{h}(\mu_{32}^{(1)}+\mu_{32}^{(2)})=\mathrm{I}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2}.$$

2. Будем изучать две задачи – до статике и по динамике.

Пусть один конец полосы заделан, а на другом действует растягивающее усилие:

$$\begin{gathered}u=w_1=\omega_1=0\ \text{при}\ x=0;\\ T_{11}=p,\ \ M_{13}=0,\ \omega_1=0\ \text{при}\ x=L.\end{gathered}\tag{2.1}$$

"Связывающий" коэффициент α, как правило, – малая величина, поэтому при определении расчетных величин можно довольствоваться точностью по α/μ включительно. Приведем выражение продольного перемещения

$$\begin{gathered}u=\frac{px}{h(\lambda+2\mu)}+\frac{12\lambda^2 p}{\mu(\lambda+2\mu)^2h^3s^3}\left\{sx-\left(1-\frac{\alpha}{2\mu}\right)\mathrm{sh}sx+\right.\\+\left[thsL+\frac{\alpha}{2\mu}(thsL+sLth^2sL-sL)\right]\cdot\\ \left.\cdot\,\mathrm{ch}sx+\frac{\alpha}{2\mu}sx(\mathrm{ch}sx-thsL\,\mathrm{sh}sx)\right\}\end{gathered}\tag{2.2}$$

$$s^2=\frac{48(\lambda+\mu)}{h^2(\lambda+2\mu)}.$$

В классическом случае для перемещения в (2.2) присутствует только первый член в правой части. Следует отметить, что здесь помимо нормального усилия появляются новые усилия T_{33}, Q_{32} и моменты M_{13}, M_{31}, M_{12}.

Теперь рассмотрим распространение волн в бесконечной пластинке. Решение системы (1.7) без внешних нагрузок ищем в виде

$$(u_1, w_1, \omega_1) = C_j \exp[i(\omega t - kx)]. \tag{2.3}$$

В системе (1.7) учтены как поперечное обжатие, так и несимметричность НДС. В случае $\alpha = 0$ она расщепляется. Тогда в получаемой системе уточняется характер продольного движения (заодно появляется новое движение – от w_1). При пренебрежении же эффектом Пуассона ($\lambda = 0$) система опять расщепляется и здесь совместно явствуют движения, обусловленные w_1 и ω_1. К тому же, так как динамическая характеристика среды I очень малая величина и, следовательно, скорость волны от моментности во много раз больше, чем другие, то при определении первых двух скоростей можно пренебречь инерционным членом $I\dfrac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}$. По этим соображениям приведенные случаи будем рассматривать в отдельности.

В случае $I\dfrac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} = 0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}(v^2 - a)\left[v^2 - \frac{1-\nu}{2}(1+\theta) - \frac{12}{k^2h^2}a\right] + \\ + \frac{4\theta^2}{\Phi}(v^2 - a) + \frac{12}{k^2h^2}a^2\frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} = 0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2c^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad a = \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu},$$

$$\theta = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \varphi = \frac{\varepsilon + \gamma}{\mu h^2}, \quad \Phi = 4(\theta + 3\varphi) + \varphi k^2 h^2.$$

В случае, когда $\lambda = 0$, дисперсионное уравнение от w_1 и ω_1 имеет вид ($I = \beta\rho h^2$)

$$\begin{gathered}\beta v^4 - v^2\left[\beta(1+\theta) + \varphi + \frac{4}{k^2h^2}(\theta + 6\beta + 3\varphi)\right] + \\ + \left(1 + \theta + \frac{24}{k^2h^2}\right)\left[\varphi + \frac{4}{k^2h^2}(\theta + 3\varphi)\right] - \frac{4\theta^2}{k^2h^2} = 0.\end{gathered} \tag{2.5}$$

В таблице приведены корни уравнений (относительные фазовые скорости) (2.4) и (2.5) (v_1 – от продольного движения, v_2 – от обжатия, v_3 – от моментности) для различных kh при $\nu = 0{,}25$; $\theta = 0{,}1$; $\varphi = 0{,}2$.

Корни уравнения (2.4) при $\theta = 0$ помещены в первых двух строках. При $\theta = 0{,}1$ эти же корни с приведенной точностью не отличаются от табличных данных (в четвертых знаках). Однако, как правило, и ν_1, и ν_2 при учете эффекта моментности увеличиваются.

kh		0,25	0,50	0,75	1	1,25	1,50	1,75	2
ν_1		0,999	0,999	0,998	0,997	0,995	0,993	0,990	0,986
	(2,4)	14,71	7,382	4,950	3,742	3,025	2,552	2,220	1,975
	(2,5)	1,967	0,994	0,674	0,518	0,428	0,369	0,329	0,301
ν_2	10^2								
ν_3	10^2	66,94	33,47	22,31	16,74	13,38	11,16	9,571	8,377

Корни уразнения (2.5) определены при $\beta = 10^{-4}$, и приведенные в таблице значения надо умножить на 10^2.

Как видно из таблицы, при увеличении толщины пластинки скорости, как правило, уменьшаются и уже для сравнительно толстых пластин скорости от продольного движения (напомним, что в классической постановке такая скорость равна единице) и поперечного обжатия одного порядка величины.

Институт механики НАН Армении

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Բարակ սալերի առաձգականության մոմենտային տեսության մասին

Վերջին տարիներին ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսությունը նոր շունչ է ստացել շնորհիվ ([1,2]) և այլ աշխատանքների:

Ներկայացվող հոդվածի հիմքում դրվում է ուղիղների վարկածն ընդհանրացված տեսքով: Շարադրանքը կարճության պատճառով տրվում է միաչափ խնդիրների համար: Հաշվի է առնվում ընդլայնական սեղմումը, որը բերում է հարթ խնդրի ճշգրտմանը:

Վերջինս առաջ է բերում նոր մեծությունների սահմանման անհրաժեշտությունը:

Դիտարկված է ստատիկայի և ալիքների տարածման խնդիրներ: Ցույց է տրվում, որ շերտի հաստության մեծացումը բերում է ալիքների արագությունների փոքրացմանը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С.А.Амбарцумян*, Механика композиционных материалов, т.32, №1, с.42-52 (1996). [2] *С.А.Амбарцумян*, Изв.РАН. МТТ, №1, с.152-165, 1997. [3] *В.Новацкий*, Теория упругости, М., Мир, 1975.