

УДК 539.3

С. О. Саркисян

Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости

(Представлено академиком НАН Армении С.А. Амбарцумяном 5/1 1999)

Плоская задача несимметричной теории упругости излагается в (1-5). В (6,7) приведен обзор работ, посвященных решению прикладных задач теории концентрации напряжений в рамках плоской задачи несимметричной теории упругости.

Построение прикладной плоской теории (обобщенного плоского напряженного состояния) и теории изгиба тонких пластин по несимметричной теории упругости можно осуществлять, применяя асимптотический метод интегрирования трехмерных уравнений несимметричной теории упругости в области тонкой пластинки (8,9).

В данной работе излагается асимптотическая теория плоского напряженного состояния (симметричная по x_3 задача) тонкой пластинки по моментной теории упругости. Построен функционал общего вариационного принципа прикладной теории плоского напряженного состояния тонкой пластинки по несимметричной теории упругости, на основе которого выводятся основные разрешающие уравнения и граничные условия указанной теории.

При построении и изучении асимптотических разложений в трехмерной области тонкой пластинки будем руководствоваться общезвестным асимптотическим методом (10-12) изучения проблем теории пластин и оболочек.

1. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Отнесем срединную плоскость к декартовой прямоугольной системе координат Ox_1, Ox_2 . Ось Ox_3 будет направлена по нормали к срединной плоскости пластинки.

Будем исходить из основных уравнений теории несимметричной упругости с независимыми полями перемещений и вращений (1).

Уравнения равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ij} = 0, \quad \nabla_j \mu^{ij} + \varepsilon^{ijk} \cdot \sigma_{jk} = 0, \quad (1.1)$$

физические соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = (\mu + \alpha)\gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\gamma_{ji} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ji} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij}, \end{cases} \quad (1.2)$$

либо в обратной форме

$$\begin{cases} \gamma_{ij} = (\mu' + \alpha')\sigma_{ij} + (\mu' - \alpha')\sigma_{ji} + \lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk}, \\ \chi_{ij} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{ij} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{ji} + \beta'\delta_{ij}\mu_{kk}, \end{cases} \quad (1.3)$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ij} = \nabla_i u_j - \varepsilon_{kij}\omega^k, \quad \chi_{ij} = \nabla_i \omega_j, \quad (1.4)$$

где σ^{ij}, μ^{ij} — компоненты силовых и моментных напряжений, γ_{ij}, χ_{ij} — компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения, u — вектор перемещения, ω — вектор независимого поворота точек тела, $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ или $\lambda', \mu', \alpha', \beta', \gamma', \varepsilon'$ — упругие константы.

На плоскостях $x_3 = \pm h$ пластинки заданы условия

$$\sigma_{3i} = p_i^\pm, \quad \mu_{3i} = m_i^\pm \quad \text{при } x_3 = \pm h. \quad (1.5)$$

На боковой поверхности пластинки ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$) заданы условия смешанного типа

$$\begin{cases} \sigma^{\bar{n}} n_j = p_j^i, \quad \mu^{\bar{n}} n_j = m_j^i \quad \text{на } \Sigma_1, \\ u = u_*(x_i), \quad \omega = \omega_*(x_i) \quad \text{на } \Sigma_2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Решение поставленной задачи складывается из суммы решений симметричной по x_3 и обратно-симметричной задач.

Рассмотрим симметричную по x_3 задачу.

2. В уравнениях трехмерной несимметричной теории упругости перейдем к безразмерной координатной системе ⁽¹⁰⁻¹²⁾

$$\xi = \frac{x_1}{l}, \quad \eta = \frac{x_2}{l}, \quad \zeta = \frac{x_3}{h}, \quad (2.1)$$

где l — характерный размер пластинки. В результате на основе (1.1)-(1.4) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром и $\delta = \frac{x}{l}$, решение которой складывается из двух типов решений: незатухающего при удалении от боковой поверхности в глубь области и типа погранслоя.

Будем изучать определение незатухающего (внутреннего) напряженно-деформированного состояния.

Решение внутренней задачи ищем в виде

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^S \delta^s Q^{(s)}, \quad (2.2)$$

где Q — любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов.

После подстановки (2.2) в систему уравнений (1.1)-(1.4) с учетом (2.1)

получим непротиворечивую систему относительно коэффициентов $Q^{(s)}$ разложения при симметричной по ζ задаче лишь при

$$\begin{cases} q = 2 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, u_1, u_2, \omega_3, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}, \\ q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, u_3, \omega_1, \omega_2, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{33}, \\ q = 0 \text{ для } \sigma_{33}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Полученную систему уравнений можно интегрировать по ζ , в результате чего получим

$$\begin{cases} u_1^{(s)} = v_1^{(s)}(\xi, \eta) + u_1^{*(s)}, & \omega_1^{(s)} = \zeta \Omega_1^{(s)}(\xi, \eta) + \omega_1^{*(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ u_3^{(s)} = \zeta w_3^{(s)}(\xi, \eta) + u_3^{*(s)}, & \omega_3^{(s)} = \Omega_3^{(s)}(\xi, \eta) + \omega_3^{*(s)}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(s)} = \tau_{11}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{11}^{*(s)}, & \sigma_{12}^{(s)} = \tau_{12}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{12}^{*(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{31}^{(s)} = \zeta \tau_{31}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{31}^{*(s)}, & \sigma_{13}^{(s)} = \zeta \tau_{13}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{13}^{*(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{33}^{(s)} = T_{33}^{(s)}(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \zeta^2 \tau_{33}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{33}^{*(s)}, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \mu_{31}^{(s)} = v_{31}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{31}^{*(s)}, & \mu_{13}^{(s)} = v_{13}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{13}^{*(s)}, \\ \mu_{11}^{(s)} = \zeta v_{11}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{11}^{*(s)}, & \mu_{33}^{(s)} = \zeta v_{33}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{33}^{*(s)}, \\ \mu_{12}^{(s)} = \zeta v_{12}^{(s)}(\xi, \eta) + \mu_{12}^{*(s)}, & \quad (1 \leftrightarrow 2), \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$\{w^{(s)} = l\lambda'(\tau_{11}^{(s)} + \tau_{22}^{(s)}), \quad \Omega_1^{(s)} = l[(\gamma' + \varepsilon')v_{31}^{(s)} + (\gamma' - \varepsilon')v_{13}^{(s)}], \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \tau_{11}^{(s)} = \frac{2\mu' + \lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \eta}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{12}^{(s)} = \frac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \xi} - \Omega_3^{(s)} \right) - \frac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \eta} + \Omega_3^{(s)} \right), \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{31}^{(s)} = - \left(\frac{\partial \tau_{11}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{21}^{(s)}}{\partial \eta} \right), \\ \tau_{13}^{(s)} = \frac{1}{\mu' + \alpha'} \frac{1}{l} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\mu' + \alpha'} \Omega_2^{(s)} - \frac{\mu' - \alpha'}{\mu' + \alpha'} \tau_{31}^{(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{33}^{(s)} = - \left(\frac{\partial \tau_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{23}^{(s)}}{\partial \eta} \right), \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases}
u_{13}^{(s)} = \frac{1}{\gamma' + \varepsilon'} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_3^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} u_{31}^{(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
u_{33}^{(s)} = - \left(\frac{\partial u_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{23}^{(s)}}{\partial \eta} \right) - l(\tau_{12}^{(s)} - \tau_{21}^{(s)}), \\
u_{11}^{(s)} = \frac{\beta' + 2\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_1^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\beta'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_2^{(s)}}{\partial \eta} - \\
- \frac{2\beta'\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} u_{33}^{(s)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
u_{12}^{(s)} = \frac{\gamma' + \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_2^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_1^{(s)}}{\partial \eta}, \quad (1 \leftrightarrow 2),
\end{cases} \quad (2.9)$$

Величины со звездочками определяются по формулам

$$\begin{cases}
u_1^{*(s)} = l \int_0^\zeta \omega_2^{(s-2)} d\zeta + l \int_0^\zeta [(\mu' + \alpha') \sigma_{31}^{(s-2)} + (\mu' - \alpha') \sigma_{13}^{(s-2)}] d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
u_3^{*(s)} = l \int_0^\zeta [\lambda' (\sigma_{11}^{*(s)} + \sigma_{22}^{*(s)}) + (\lambda' + 2\mu') \sigma_{33}^{(s-2)}], \\
\omega_3^{*(s)} = l \int_0^\zeta [\beta' (\mu_{11}^{(s-2)} + \mu_{22}^{(s-2)}) + (\beta' + 2\gamma') \mu_{33}^{(s-2)}] d\zeta, \\
\omega_1^{*(s)} = l \int_0^\zeta [(\gamma' + \varepsilon') \mu_{31}^{*(s)} + (\gamma' - \varepsilon') \mu_{13}^{*(s)}] d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2),
\end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases}
\sigma_{11}^{*(s)} = \left[\frac{2\mu' + \lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial u_1^{*(s)}}{\partial \xi} - \frac{\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \frac{1}{l} \frac{\partial u_2^{*(s)}}{\partial \eta} \right] - \frac{2\mu'\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} \sigma_{33}^{(s-2)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
\sigma_{12}^{*(s)} = \frac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial u_2^{*(s)}}{\partial \xi} - \omega_3^{*(s)} \right) - \frac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial u_1^{*(s)}}{\partial \eta} + \omega_3^{*(s)} \right), \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
\sigma_{31}^{*(s)} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{21}^{*(s)}}{\partial \eta} \right) d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\
\sigma_{13}^{*(s)} = \frac{1}{\mu' + \alpha'} \frac{1}{l} \frac{\partial u_3^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\mu' + \alpha'} \omega_2^{*(s)} - \frac{\mu' - \alpha'}{\mu' + \alpha'} \sigma_{31}^{*(s)}, \\
\sigma_{33}^{*(s)} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{*(s)}}{\partial \eta} \right) d\zeta,
\end{cases} \quad (2.11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_{31}^{*(S)} &= -\int_0^\zeta \left[\left(\frac{\partial \mu_{11}^{*(S-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu_{21}^{*(S-2)}}{\partial \eta} \right) + l(\sigma_{23}^{*(S-2)} - \sigma_{32}^{*(S-2)}) \right] d\zeta, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \mu_{13}^{*(S)} &= \frac{1}{\gamma' + \varepsilon'} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_3^{*(S)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \mu_{31}^{*(S)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \mu_{33}^{*(S)} &= -\int_0^\zeta \left[\left(\frac{\partial \mu_{13}^{*(S)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu_{23}^{*(S)}}{\partial \eta} \right) + l(\sigma_{12}^{*(S)} - \sigma_{21}^{*(S)}) \right] d\zeta, \\ \mu_{11}^{*(S)} &= \frac{\beta' + 2\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_1^{*(S)}}{\partial \xi} - \frac{\beta'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_2^{*(S)}}{\partial \eta} - \\ &\quad - \frac{2\beta'\gamma'}{(\beta' + 2\gamma')^2 - \beta'^2} \mu_{33}^{*(S)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \mu_{12}^{*(S)} &= \frac{\gamma' + \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_2^{*(S)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{4\gamma'\varepsilon'} \frac{1}{l} \frac{\partial \omega_1^{*(S)}}{\partial \eta}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

и являются полиномами по ζ . При $S=0;1$ они равны нулю, так как $Q^{(S)} \equiv 0$ при $S < 0$. Формулы (2.10)-(2.12) имеют рекуррентный характер и позволяют определить без решения каких-либо уравнений величины со звездочкой для приближения S , если известны все величины, относящиеся к приближениям $0, 1, \dots, (S-1)$.

Из формул (2.4) будем иметь следующую картину качественного распределения перемещений и поворотов по толщине пластинки при $S=0$ и $S=1$: тангенциальные компоненты вектора перемещения и нормальный компонент вектора поворота не зависят от поперечной координаты ζ , т.е. постоянны по толщине пластинки. Отметим, что эти качественные результаты асимптотического метода интегрирования можно принимать как основу или гипотезу при построении прикладной теории тонких пластин в смысле плоского напряженного состояния по моментной теории упругости.

Будем требовать, чтобы определяемые по формулам (2.5), (2.6) силовые и моментные напряжения удовлетворяли граничным условиям (1.5) (в смысле симметричной по x_3 задачи), в результате получим

$$\tau_{31}^{(S)} = \frac{1}{2} X_1^{(S)}, \quad \nu_{31}^{(S)} = \frac{1}{2} m_1^{(S)}, \quad T_{33}^{(S)} + \frac{1}{2} \tau_{33}^{(S)} = \frac{1}{2} Z_1^{(S)}, \quad \nu_{33}^{(S)} = \frac{1}{2} q_1^{(S)}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (2.13)$$

где

$$X_1^{(0)} = X_1, \quad X_1^{(1)} = 0, \quad X_1^{(k)} = -2\sigma_{31}^{*(k)}(\xi=1), \quad m_1^{(0)} = m_1, \\ m_1^{(1)} = 0, \quad m_1^{(k)} = -2\mu_{31}^{*(k)}(\xi=1),$$

$$X_1 = p_1^+ + p_1^-, \quad m_1 = m_1^+ - m_1^-, \quad (1 \rightarrow 2), \quad (X \rightarrow Y \rightarrow Z), \quad (m \rightarrow p \rightarrow q).$$

Уравнения (2.7)-(2.9) и (2.13) составляют полную систему относительно неизвестных

$$\begin{aligned} &v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, w^{(s)}, \Omega_1^{(s)}, \Omega_2^{(s)}, \Omega_3^{(s)}, \tau_{11}^{(s)}, \tau_{22}^{(s)}, \tau_{12}^{(s)}, \tau_{21}^{(s)}, \tau_{31}^{(s)}, \tau_{32}^{(s)}, \\ &\tau_{13}^{(s)}, \tau_{23}^{(s)}, \tau_{33}^{(s)}, T_{33}^{(s)}, \\ &v_{13}^{(s)}, v_{23}^{(s)}, v_{31}^{(s)}, v_{32}^{(s)}, v_{33}^{(s)}, v_{11}^{(s)}, v_{22}^{(s)}, v_{12}^{(s)}, v_{21}^{(s)}. \end{aligned}$$

При этом основная разрешающая система уравнений будет относительно девяти величин $\tau_{11}^{(s)}, \tau_{22}^{(s)}, \tau_{12}^{(s)}, \tau_{21}^{(s)}, v_{23}^{(s)}, v_{13}^{(s)}, v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \Omega_3^{(s)}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{11}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{21}^{(s)}}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} X_1^{(s)}, & (1 \leftrightarrow 2), (X \leftrightarrow Y), \\ \frac{\partial v_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{23}^{(s)}}{\partial \eta} + l(\tau_{11}^{(s)} - \tau_{21}^{(s)}) = -\frac{1}{2} q_1^{(s)}, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \tau_{11}^{(s)} = \frac{2\mu' + \lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\lambda'}{(2\mu' + \lambda')^2 - \lambda'^2} \frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \eta}, & (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{12}^{(s)} = \frac{\mu' + \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \xi} - \Omega_3^{(s)} \right) - \frac{\mu' - \alpha'}{4\mu'\alpha'} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \eta} + \Omega_3^{(s)} \right), & (1 \leftrightarrow 2), \\ v_{13}^{(s)} = \frac{1}{\gamma' + \varepsilon' l} \frac{1}{l} \frac{\partial \Omega_3^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \frac{1}{2} m_1^{(s)}, & (1 \leftrightarrow 2), (m \leftrightarrow p), \end{cases} \quad (2.15)$$

Систему (2.14), (2.15), в свою очередь, можно свести к трем уравнениям относительно $v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \Omega_3^{(s)}$. Найдя неизвестные, входящие в (2.14), (2.15), по соответствующим формулам определяем все величины внутренней задачи.

3. Введем теперь интегральные по толщине пластинки усилия и моменты. Для симметричной (по ζ) задачи эти понятия будут тангенциальными усилиями $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ и моментами L_{13} и L_{23} , которые определяются по формулам

$$\begin{cases} T_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} dx_3, & S_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_3, & L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dx_3, & (1 \rightarrow 2). \end{cases} \quad (3.1)$$

Обозначим через $T_{11}^{(s)}, S_{12}^{(s)}, L_{13}^{(s)}, (1 \rightarrow 2)$ значения этих величин для приближения S . Учитывая (2.5) (2.6) и (3.1), для этих величин получим

$$\begin{cases} T_{11}^{(s)} = l\delta^{-1+s} (2\tau_{11}^{(s)} + T_{11}^{\alpha(s)}), & S_{12}^{(s)} = l\delta^{-1+s} (2\tau_{12}^{(s)} + S_{12}^{\alpha(s)}), \\ L_{13}^{(s)} = l\delta^{-1+s} (2v_{13}^{(s)} + L_{13}^{\alpha(s)}), & (1 \rightarrow 2), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{cases} (T_{11}^{\alpha(s)}, T_{12}^{\alpha(s)}, S_{12}^{\alpha(s)}, S_{21}^{\alpha(s)}) = \int_{-1}^1 (\sigma_{11}^{\alpha(s)}, \sigma_{22}^{\alpha(s)}, \sigma_{12}^{\alpha(s)}, \sigma_{21}^{\alpha(s)}) d\zeta, \\ (L_{13}^{\alpha(s)}, L_{23}^{\alpha(s)}) = \int_{-1}^1 (\mu_{13}^{\alpha(s)}, \mu_{23}^{\alpha(s)}) d\zeta, \end{cases} \quad (3.3)$$

причем

$$\left\{ T_{11} = \sum_{s=0}^S T_{11}^{(s)}, S_{12} = \sum_{s=0}^S S_{12}^{(s)}, L_{13} = \sum_{s=0}^S L_{13}^{(s)}, (1 \leftrightarrow 2). \right. \quad (3.4)$$

Используя (3.2), выразим $\tau_{11}^{(s)}, \tau_{22}^{(s)}, \tau_{12}^{(s)}, \tau_{21}^{(s)}, \nu_{13}^{(s)}, \nu_{23}^{(s)}$ через усилия и моменты соответственно и, подставляя их в систему (2.14), (2.15), будем иметь

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}^{(s)}}{\partial x_2} &= \delta^{-1+s} \left[-X_1^{(s)} + l \left(\frac{\partial T_{11}^{*(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}^{*(s)}}{\partial x_2} \right) \right], (1 \leftrightarrow 2), (X \leftrightarrow Y), \\ \frac{\partial L_{13}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}^{(s)}}{\partial x_2} + (S_{12}^{(s)} - S_{21}^{(s)}) &= \\ &= \delta^{-1+s} \left[-q_1^{(s)} + l \left(\frac{\partial L_{13}^{*(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}^{*(s)}}{\partial x_2} \right) + (S_{21}^{*(s)} - S_{12}^{*(s)}) \right], \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_{11}^{(s)} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11}^{(s)} + \nu \Gamma_{22}^{(s)}) + l \delta^{-1+s} T_{11}^{*(s)}, (1 \leftrightarrow 2), \\ S_{12}^{(s)} &= 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{12}^{(s)} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{21}^{(s)} + l \delta^{-1+s} S_{12}^{*(s)}, (1 \leftrightarrow 2), \\ L_{13}^{(s)} &= \frac{2h}{\gamma' + \varepsilon'} k_{13}^{(s)} - l \delta^{-1+s} \frac{\gamma' - \varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} m_1^{(s)} + l \delta^{-1+s} L_{13}^{*(s)}, (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{(s)} &= \delta^{-2+s} \frac{\partial \nu_1^{(s)}}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12}^{(s)} = \delta^{-2+s} \left(\frac{\partial \nu_1^{(s)}}{\partial x_1} - \Omega_3^{(s)} \right), \\ k_{13}^{(s)} &= \delta^{-2+s} \frac{\partial \Omega_3^{(s)}}{\partial x_1}, \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $\Gamma_{11}^{(s)}, \Gamma_{22}^{(s)}, \Gamma_{12}^{(s)}, \Gamma_{21}^{(s)}, k_{13}^{(s)}, k_{23}^{(s)}$ — компоненты тангенциальной деформации и изгиба-кручения в срединной плоскости пластинки.

Уравнения (3.5)-(3.7) при $S = 0$ дадут уравнения равновесия плоского напряженного состояния пластинки с соответствующими соотношениями упругости по несимметричной теории упругости (с независимыми полями перемещений и вращений).

Исключив из (3.5)-(3.7) $T_{11}^{(s)}, T_{22}^{(s)}, S_{12}^{(s)}, S_{21}^{(s)}, L_{13}^{(s)}, L_{23}^{(s)}$, решение задачи сведем к решению системы из трех уравнений относительно перемещений $\nu_1^{(s)}, \nu_2^{(s)}$ и вращений $\Omega_3^{(s)}$.

4. Построение математически обоснованной теории тонких пластин по несимметричной теории упругости, в рамках приближений получаемой асимптотической теории, требует также применения общего вариационного принципа. Применение общего вариационного принципа позволяет наряду с уравнениями равновесия, соотношениями упругости, геометрическими соотношениями вывести соответствующие им граничные условия.

Функционал общего вариационного принципа трехмерной теории несимметричной упругости имеет вид

$$I = \int_V \left\{ W(\gamma_{ij}, \chi_{ij}) - \sigma_{ij} [\gamma_{ij} - (\nabla_i u_j - \varepsilon_{kij} \omega_k)] - \mu_{ji} (\chi_{ij} - \nabla_i \omega_j) \right\} dv - \\ - \int_{s^+} (p_*^i u_i + m_*^i \omega_i) dS - \int_{s^-} (\bar{p}_*^i u_i + \bar{m}_*^i \omega_i) dS - \int_{\Sigma_1} (p_*^i u_i + m_*^i \omega_i) dS - \\ - \int_{\Sigma_2} [p^i (u_i - u_i^*) + m^i (\omega_i - \omega_i^*)] dS, \quad (4.1)$$

где $W(\gamma_{ij}, \chi_{ij})$ — плотность потенциальной энергии деформации (1).

Варьируя функционал (4.1) по всем функциональным аргументам, приходим (как в качестве уравнений Эйлера и в качестве естественных эйлеровых граничных условий) к уравнениям (1.1)–(1.4) и граничным условиям (1.5), (1.6) трехмерной теории несимметричной упругости.

На основе результатов асимптотической теории тонких пластин возможно приведение функционала (4.1) к двумерному континиуму.

После перехода к координатам (2.1) и подстановки (2.2) в выражение (4.1), будем удерживать в нем члены, имеющие наибольший асимптотический порядок (т.е. δ^{-2}), в итоге получим формулу, определяющую функционал теории плоского напряженного состояния пластинки по несимметричной теории упругости

$$I_0 = \int_S \left\{ W_0 - \left[T_{11} \left(\Gamma_{11} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + T_{22} \left(\Gamma_{22} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + S_{21} \left[\Gamma_{21} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Omega_3 \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + S_{12} \left[\Gamma_{12} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3 \right) \right] + L_{13} \left(k_{13} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \right) + L_{23} \left(k_{23} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} \right) \right] \right\} dS - \\ - \int_S (m_1 h k_{31} + p_1 h k_{32}) dS - \int_S (X_1 u_1 + Y_1 u_2 + q_1 \Omega_3) dS - \\ - \int_{l_1} (p_{vv}^* u_v + p_{\alpha}^* u_\alpha + M_3^* \Omega_3) dl - \int_{l_2} [T_{vv} (u_v - u_v^*) + S_{\alpha} (u_\alpha - u_\alpha^*) + L_v (\Omega_3 - \Omega_3^*)] dl, \quad (4.2)$$

где плотность (поверхностная) потенциальной энергии деформации выражается так:

$$W_0 = \frac{2Eh}{2(1-\nu^2)} (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu \Gamma_{12} \Gamma_{21}) + \frac{1}{2} 2h\mu (\Gamma_{21} + \Gamma_{12})^2 + \\ + \frac{1}{2} 2h\alpha (\Gamma_{21} - \Gamma_{12})^2 + \frac{1}{2} 2h\gamma (k_{31} + k_{13})^2 + \frac{1}{2} 2h\varepsilon (k_{31} - k_{13})^2 + \\ + 2h \frac{1}{2} \gamma (k_{32} + k_{23})^2 + \frac{1}{2} 2h\varepsilon (k_{32} - k_{23})^2 \quad (4.3)$$

Здесь $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{21}, \Gamma_{12}, k_{13}, k_{23}$ представляют собой компоненты тангенциальной деформации и изгиба-кручения в срединной плоскости пластинки; u_1, u_2 — тангенциальные перемещения, а Ω_3 — поворот (независимый) вокруг оси

Ox_3 точек срединной плоскости пластинки; u_v, u_t — нормальное и касательное составляющие вектора перемещения точек контура (λ) срединной плоскости пластинки; $p_{vv}^*, p_{\alpha}^*, M_3^*$ — внешние контурные (на l_1) усилия и момент; $\tilde{u}_v^*, \tilde{u}_t^*, \tilde{\Omega}_3^*$ — заданные перемещения и поворот точек контура (l_2) срединной плоскости пластинки.

Следует отметить, что k_{31} и k_{32} не содержат дополнительных степеней свободы, они выражаются так:

$$\left\{ k_{31} = \frac{1}{2(\gamma + \varepsilon)} m_1 - \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} k_{13}, (1 \leftrightarrow 2), (m \leftrightarrow p). \right. \quad (4.4)$$

Варьируя функционал (4.2) по всем функциональным аргументам, приходим к уравнениям теории плоского напряженного состояния при несимметричной теории упругости, а именно:

уравнения равновесия

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} &= -X_1, (1 \leftrightarrow 2), (X \leftrightarrow Y), \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) &= -q_1, \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

соотношения упругости

$$\left\{ \begin{aligned} T_{11} &= \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{11}} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11} + \nu \Gamma_{22}), (1 \leftrightarrow 2), \\ S_{12} &= \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{12}} = 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{12} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{21}, (1 \leftrightarrow 2), \\ L_{13} &= \frac{\partial W}{\partial k_{13}} = 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} k_{13} + hm_1 \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, (1 \leftrightarrow 2), (m \leftrightarrow p), \end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (4.7)$$

граничные условия

$$\left\{ \begin{aligned} \text{на } l_1: \quad T_{vv} &= p_{vv}^*, \quad S_{\alpha} = p_{\alpha}^*, \quad L_v = M_3^*, \\ \text{на } l_2: \quad u_v &= \tilde{u}_v^*, \quad u_t = \tilde{u}_t^*, \quad \Omega_3 = \tilde{\Omega}_3^*. \end{aligned} \right. \quad (4.8)$$

При подстановке (4.6), (4.7) в уравнения равновесия (4.5) получим уравнения плоского напряженного состояния по несимметричной теории упругости в перемещениях и поворотах (независимых).

Гюмрийский государственный педагогический институт им.М.Налбандяна

Ս. Հ. ՄԱՐԳԱՅԱՆ

Առաձգականության մոմենտային տեսույցամբ բարակ սալի հարթ խնդրի ասիմպտոտիկական տեսությունը եվ վարիացիոն հավասարումը

Աշխատանքում շարադրվում է առաձգականության մոմենտային տեսույցամբ բարակ սալի հարթ լարվածության վիճակի ասիմպտոտիկական տեսությունը:

Երկրաչափական փոքր պարամետրերի առկայությունը բարակ սալի առաձգականության մոմենտային տեսույցան հավասարումներում այնպիսի է, որ դիֆերենցիալ հավասարումների նշված համակարգը դառնում է ոչ կանոնավոր (սինգուլյար) գրգռվող, որի դեպքում լուծումը արտահայտվում է ներքին խնդրի (չմարող լուծում) և սահմանային շերտի լուծումների գումար:

Կառուցվում են ներքին խնդրի ասիմպտոտիկական վերլուծումը ըստ ասիմպտոտիկական մոտավորումների:

Ելնելով ելակետային ասիմպտոտիկական վերլուծության որակական արդյունքներից, կառուցվում է առաձգականության մոմենտային տեսույցամբ բարակ սալի լարվածային վիճակի (կիրառական տեսությանը) վարիացիոն հավասարումը, որի հիման վրա արտածվում են այդ տեսության հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները և եզրային պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. Новацкий, Теория упругости, М., Мир, 1975. ² В.А.Пальмов, ПММ, т.28, в.6, с.1117-1120 (1964). ³ А.Н.Булыгин, Е.В.Кувшинский, ПММ, т.31, в.3, с.543-547 (1967). ⁴ Г.Н.Савин, в сб."Концентрация напряжений", Киев, Наукова думка, 1968. ⁵ Н.Ф.Морозов, Математические вопросы теории трещин, М., Наука, 1984. ⁶ Г.Н.Савин, Д.Н.Немиш, ПМ, т.4, вып.12, с.1-17 (1968). ⁷ Ю.В.Кириллов, А. А.Постников, А.И.Тюленев, в сб." Исследования пластин и оболочек", Казань, Изд-во КГУ, 1990. ⁸ Р.А.Дудников, С.А.Назаров, ДАН, т. 262, с.306-309 (1982). ⁹ С.О.Саркисян, Актуальная проблема механики оболочек. Тр.международ.конфер. посвященной памяти засл. деят. науки ТАССР проф. А.В.Сеченкова, Казань: 9-11 сентября 1998г., Казанское мат. о-во, Унипресс, с.198-203, 1998. ¹⁰ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, М., Наука, 1976. ¹¹ Л.А.Агаловлян, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек, М., Наука, 1997. ¹² С.О.Саркисян, Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек, Ереван, Изд-во АН Армении, 1992.