ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №2

МЕХАНИКА

УДК 519.68:510

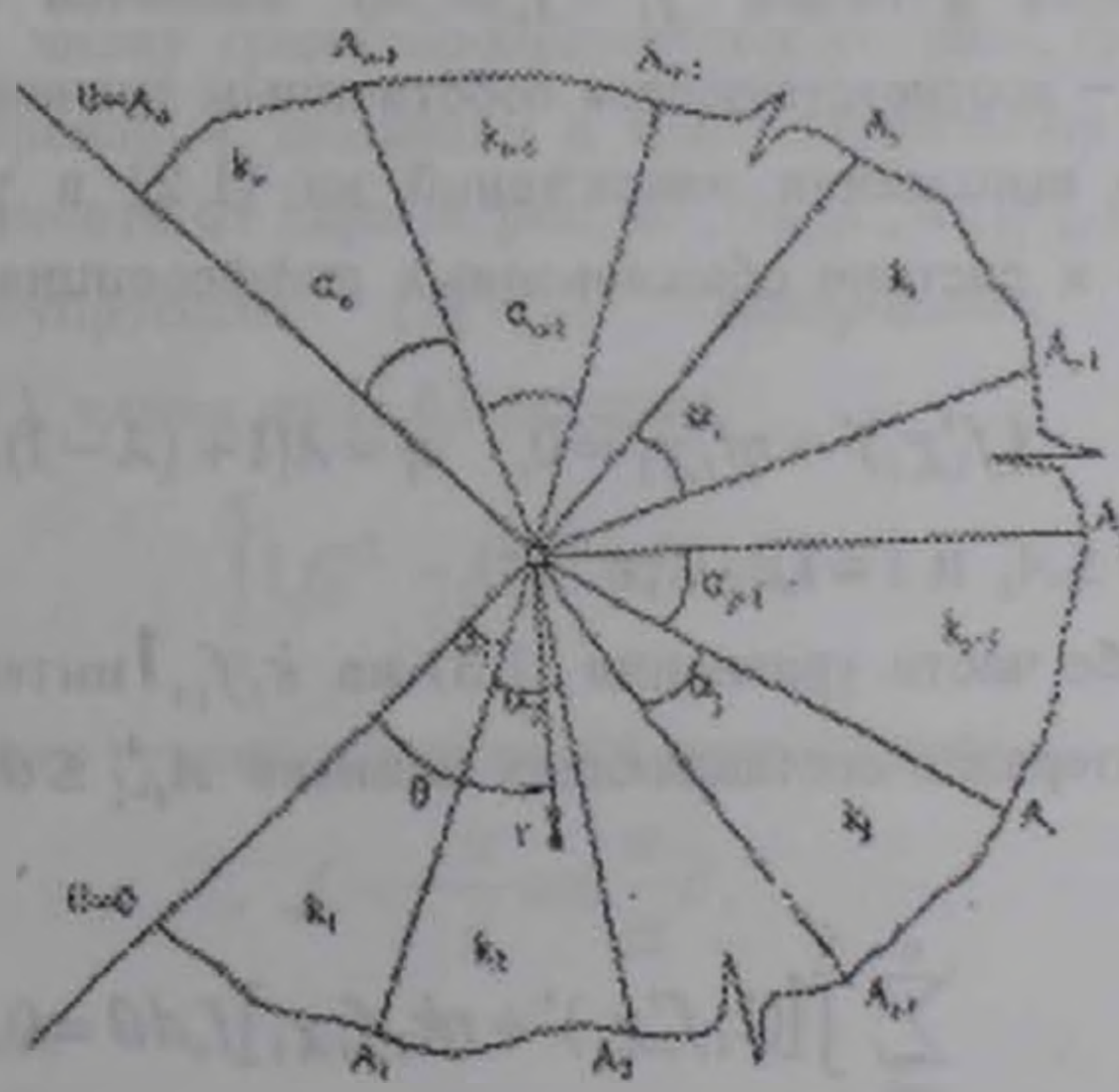
К. С. Тадевосян, академик НАН Армении **М. А. Задоян**

Интегральный способ изучения прочности соединения

(Представлено 5/XI 1998)

Прочность соединения составного тела можно обеспечить, изучая условия малонапряженности на крае контактной поверхности ([1]). Это исследование сводится к решению задачи на собственные значения для определенной системы дифференциальных уравнений при однородных гранично-контактных условиях. На этом основании в координатном пространстве физических и геометрических параметров, при помощи которых выбираются комбинации параметров окрестности угловой точки, обеспечивающие нулевые напряжения на рассматриваемом крае, строится область малонапряженности.

Однако подобную задачу о прочности соединения можно исследовать, обходя решение соответствующей системы дифференциальных уравнений ([2]).



Рассмотрим напряженное состояние в окрестности угловой точки составного клина, изготовленного из n призматических несжимаемых неоднородных тел, материалы которых упрочняются по степенному закону

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m ,$$

где σ_0 и ε_0 интенсивности напряжения и деформации, m – параметр, для всех материалов считается одинаковым, k – модуль деформации, принимается различным. Углы при вершинах составляющих клиньев обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Введем также обозначения $A_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i$, причем $A_0 = 0$ (рисунок). Величины в интервалах $A_{i-1} \le \theta \le A_i$ отмечаем с индексом i, где $i = 1,2,\ldots,n$.

1. Продольный сдвиг. Когда составной клин испытывает деформацию продольного сдвига, в каждом составляющем клине имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{ri}}{r} = 0, \tag{1.1}$$

соотношения между деформациями и перемещениями

$$2\gamma_{ri} = \frac{\partial w_i}{\partial r}, \quad 2\gamma_{\theta i} = \frac{\partial w_i}{\partial \theta},$$

$$\sigma_{oi} = \sqrt{\tau_{\theta i}^2 + \tau_{ri}^2}, \quad \varepsilon_{oi} = \sqrt{\left(\frac{\partial w_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Компоненты напряжений и перемещений ищем в следующей форме:

$$\tau_{ri} = \lambda r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, \quad \tau_{\theta i} = r^{(\lambda-1)m}\tau_i, \quad \tau_i = k_i f_i' \chi_i, \quad w_i = r^{\lambda} f_i,$$
$$\chi_i = \left(\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2}\right)^{m-1} \quad A_{i-1} \le \theta \le A_i. \tag{1.2}$$

Здесь система функции $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ является искомой собственной функцией, а λ – соответствующим собственным значением.

Подставляя выражения напряжений из (1.2) в уравнения равновесия (1.1), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(f_1'\chi_i)' + \eta f_i \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda[1 + (\lambda - 1)m], \tag{1.3}$$

причем $A_{i-1} \le \theta \le A_i$ и $i = 1,2,\ldots,n$.

Умножая обе части уравнения (1.3) на $k_i f_i$, интегрируя по θ в пределах каждого интервала составляющих клиньев $A_{i-1} \le \theta \le A_i$ и суммируя, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \left[(k_i f_1' \chi_i)' + \eta k_i f_i \chi_i\right] f_i d\theta = 0.$$

Произведя интегрирование по частям и преобразуя, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{A_{i-1}}^{A_i} k_i(f_1'^2-\eta f_1^2)\chi_i d\theta - L = 0, \tag{1.4}$$

где

$$L=\sum_{i=1}^{n} k_i f_1' f_i \chi_i\Big|_{A_{i-1}}^{A_i} = \sum_{i=1}^{n}\tau_i f_i\Big|_{A_{i-1}}^{A_i}.$$

Преобразовывая, находим

$$L=\tau_n f_n\big|_{\theta=A_n} - \tau_1 f_1\big|_{\theta=0} + \sum_{i=1}^{n-1}(\tau_i f_i - \tau_{i+1} f_{i+1})\big|_{\theta=A_i}. \tag{1.5}$$

На контактных поверхностях следует соблюдать условия сопряжения. В нашем случае они пишутся в виде $f_i = f_{i+1}, \tau_i = \tau_{i+1}$ при $\theta = A_i$, причем $i=1,2,\ldots,n-1$. На внешних краях составного клина могут быть поставлены краевые условия: первого рода, тогда $\tau_1(0)=\tau_n(A_n)=0$; второго рода, $f_1(0)=f_n(A_n)=0$; третьего рода, $\tau_1(0)=f_n(A_n)=0$ $f_1(0)=\tau_n(A_n)=0$.

Легко заметить, что для указанных гранично-контактных условий из (1.5) следует $L=0$.

Тогда (1.4) перепишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_{A_{i-1}}^{A_i}\frac{f_i'^2-\eta f_i^2}{\left(\sqrt{f_i'^2+\lambda^2 f_i^2}\right)^{1-m}}d\theta=0, \tag{1.6}$$

где $\gamma_i = k_i / k_1$.

Подбирая функции f_i таким образом, чтобы они удовлетворяли по возможности большому числу гранично-контактных условий, подставляя в (1.6) и произведя интегрирование, приходим к трансцендентному уравнению относительно λ в зависимости от параметров, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n;\gamma_2,\gamma_3,\ldots,\gamma_n;m$.

Для линейно-упругого $(m=1)$ однородного $(\gamma_i=1, \alpha_1+\alpha_2+ +\ldots+\alpha_n=\alpha,\ f_i=f)$ клина из (1.6) находим

$$\int_0^{\alpha}(f_i'^2-\lambda^2 f_i^2)d\theta=0. \tag{1.7}$$

Полагая в (1.7) для граничных условий первого рода

$$f=-\frac{\alpha}{\pi}\cos\frac{\pi}{\alpha}\theta,$$

будем иметь уравнение

$$\lambda=\frac{\pi}{\alpha},$$

совпадающее с соответствующим точным значением.

Принимая в (1.6) $\lambda=1$, находим

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{f_i'^2 - f_i^2}{\left(\sqrt{f_i'^2 + f_i^2}\right)^{1-m}} d\theta = 0. \tag{1.8}$$

В n-мерном координатном пространстве $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ уравнение (1.7) определяет гиперповерхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений в зависимости от параметров $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n; m$.

2. Плоская деформация. В каждом составляющем клине имеем уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\theta i}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta i}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta i} = 0,\end{gathered} \tag{2.1}$$

соотношения между компонентами деформации и перемещения

$$\varepsilon_{ri} = \frac{\partial u_i}{\partial r}, \ \ \varepsilon_{\theta i} = \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial \theta}, \ \ 2\gamma_{\theta i} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial r} - \frac{\upsilon_i}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_i}{\partial \theta},$$

зависимости между напряжениями и деформацией

$$\sigma_{ri} - \sigma_{\theta i} = 2k_i \varepsilon_{0i}^{m-1} \varepsilon_{ri}, \ \ \tau_{r\theta i} = 2k_i \varepsilon_{0i}^{m-1} \gamma_{r\theta i},$$

интенсивности напряжений и деформаций

$$\sigma_{0i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\theta i}}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta i}^2}, \quad \varepsilon_{0i} = 2\sqrt{\varepsilon_{ri}^2 + \gamma_{r\theta i}^2}.$$

Предварительно вводя обозначения

$$\begin{gathered}\sigma_i = [k_i(f_i'' + \delta f_i)\chi_i]' + 4\eta k_i f_i' \chi_i, \\ \tau_i = k_i(f_i'' + \delta f_i)\chi_i, \ \ \delta = 1 - \lambda^2,\end{gathered} \tag{2.2}$$

компоненты напряжения и перемещения представим в форме

$$\begin{gathered}\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 4\lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \ \ \sigma_{\theta i} = \frac{r^{(\lambda-1)m}}{(\lambda-1)m}\sigma_i, \\ \tau_{r\theta i} = r^{(\lambda-1)m}\tau_i, \ \ u_i = r^\lambda f_i', \ \ v = -(\lambda+1)r^\lambda f_i, \\ \chi_i = \left(\sqrt{(f_i'' + \delta f_i)^2 + 4\lambda^2 f_i'^2}\right)^{m-1}, \ \ A_{i-1} \le \theta \le A_i,\end{gathered} \tag{2.3}$$

причем $i = 1, 2, \ldots, n$.

Система функций $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ рассматривается как искомая собственная функция, а λ – соответствующее собственное значение задачи.

Подставляя напряжения из (2.3) в уравнения равновесия (2.1), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$[(f_i''+\delta f_i)\chi_i]''+\nu(f_i''+\delta f_i)\chi_i+4\eta(f_i'\chi_i)'=0, \qquad (2.4)$$

где $\nu=1-\eta^2/\lambda^2$, причем $A_{i-1}\le\theta\le A_i$ и $i=1,2,\dots,n$.

Умножая обе части уравнения (2.4) на $k_i f_i$ и интегрируя по θ в пределах каждого интервала составляющих клиньев $A_{i-1}\le\theta\le A_i$, а затем суммируя, находим

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{A_{i-1}}^{A_i}\left\{\left[k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i\right]''+\nu k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i+4\eta(k_i f_i'\chi_i)'\right\}f_i d\theta=0. \qquad (2.5)$$

Интегрируя по частям дважды, находим

$$\int_{A_{i-1}}^{A_i}[k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i]''f_i d\theta=[k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i]'f_i\Big|_{A_{i-1}}^{A_i}-$$

$$-[k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i]f_i'\Big|_{A_{i-1}}^{A_i}+\int_{A_{i-1}}^{A_i}[k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i]f_i''d\theta,$$

а также

$$\int_{A_{i-1}}^{A_i}k_i(f_i'\chi_i)'f_i d\theta=k_i f_i' f_i\chi_i\Big|_{A_{i-1}}^{A_i}-\int_{A_{i-1}}^{A_i}k_i f_i'^2\chi_i d\theta.$$

Из (2.5) с учетом последних преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{A_{i-1}}^{A_i}\left[\left(f_i''+\delta f_i\right)\left(f_i''+\nu f_i\right)-4\eta f_i'^2\right]k_i\chi_i d\theta-L=0, \qquad (2.6)$$

где

$$L=\sum_{i=1}^{n}\left\{[k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i]'+4\eta k_i f_i'\chi_i\right\}f_i\Big|_{A_{i-1}}^{A_i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[k_i(f_i''+\delta f_i)\chi_i]f_i'\Big|_{A_{i-1}}^{A_i}. \qquad (2.7)$$

Далее, учитывая обозначения (2.2), из (2.7) будем иметь

$$L=\sum_{i=1}^{n}(\sigma_i f_i-\tau_i f_i')\Big|_{A_{i-1}}^{A_i}. \qquad (2.8)$$

Преобразование (2.8) можно представить в следующей форме:

$$L = (\sigma_n f_n - \tau_n f_n^{'})_{\theta=A_n} - (\sigma_1 f_1 - \tau_1 f_1^{'})_{\theta=A_0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_i f_i - \sigma_{i+1} f_{i+1})_{\theta=A_i} - \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_i f_i' - \tau_{i+1} f_{i+1}')_{\theta=A_i}. \tag{2.9}$$

На контактных поверхностях следует выполнять условия сопряжения $\sigma_i = \sigma_{i+1}$, $\tau_i = \tau_{i+1}$, $f_i = f_{i+1}$, $f_i' = f_{i+1}'$ при $\theta = A_i$, причем $i = 1,2,\ldots,n-1$. На внешних краях могут быть поставлены граничные условия: первого рода, тогда $\sigma_1(0) = \tau_1(0) = \sigma_n(A_n) = \tau_n(A_n) = 0$, второго рода, тогда $f_1(0) = f_1'(0) = f_n(A_n) = f_n'(A_n) = 0$, третьего рода, тогда $\sigma_1(0) = \tau_1(0) = f_n(A_n) = f_n'(A_n) = 0$, или же $f_1(0) = f_1'(0) = \sigma_n(A_n) = \tau_n(A_n) = 0$.

Для всех приведенных гранично-контактных условий из (2.9) заключаем, что $L = 0$. Тогда из (2.6) следует

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\left(f_i^{''} + \delta f_i\right)\left(f_i^{''} + \nu f_i\right) - 4\eta f_i'^2}{\left(\sqrt{\left(f_i^{''} + \delta f_i\right)^2 + 4\lambda f_i'^2}\right)^{1-m}} d\theta = 0. \tag{2.10}$$

Подбирая функции f_i, удовлетворяющие по возможности большому числу гранично-контактных условий, подставляя в (2.10) и интегрируя, приходим к трансцендентному уравнению относительно λ в зависимости от параметров $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n; \gamma_2,\ldots,\gamma_n, m$.

Полагая в (2.10) $\lambda = 1$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{f_i''^2 - 4f_i'^2}{\left(\sqrt{f_i''^2 + 4f_i'^2}\right)^{1-m}} d\theta = 0. \tag{2.11}$$

В координатном n-мерном пространстве $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ уравнение (2.11) определяет гиперповерхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений. Указанная поверхность зависит от n параметров: $\gamma_2,\ldots,\gamma_n, m$.

Институт механики НАН Армении

Կ. Ս. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Միացությունների ամրության ուսումնասիրման ինտեգրալային եղանակը

Բաղադրյալ մարմնի միացությունների ամրությունը կարելի է ապահովել ուսումնասիրելով միացման մակերևույթի եզրում թերլարվածության պայմանները (1): *Այդ ուսումնասիրությունը հանգում է դիֆերենցիալ հավասարումների մի որոշակի համակարգի համար սեփական արժեքների խնդրի ուսումնասիրությանը համասեռ եզրային-կոնտակտային պայմանների դեպքում: Դրա հիման վրա ֆիզիկական և երկրաչափական տարածական կոորդինատային սիստեմում կառուցվում են թերլարվածության տիրույթները, որի օգնությամբ ընտրվում են անկյունային կետի շրջակայքի պարամետրերի կոմ-*

բինացիաները, որոնք ապահովում են զրոյական լարումներ ուսումնասիրվող եզրում: Սակայն նման խնդիր միացությունների ամրության վերաբերյալ կարելի է ուսումնասիրել շրջանցելով դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան լուծումը (2): *Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է այդ խնդիրը: Առանց ուսումնասիրելու դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները նշված եզրային-կոնտակտային պայմանների համար, երկայնական սահքի և հարթ դեֆորմացիաների խնդիրների համար, սեփական արժեքների որոշումը հանգում է ինտեգրալ պայմանի բավարարմանը, որից ստացվում է որոնելի սեփական արժեքը: Նախապես ֆունկցիաներն ընտրվում են այնպես, որ հնարավորին չափով շատ թվով եզրային պայմանների բավարարեն: Բաղադրիչ սեպերի նյութերն ընտրվում են աստիճանային ամրապնդվող, որոնց ցուցիչները հավասար են, իսկ դեֆորմացիայի մոդուլները տարբեր:*

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К.С.Чобанян*, Напряжение в составных упругих телах, Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1987. [2] *М.А.Задоян*, Пространственные задачи теории пластичности, М., Наука, 1992.