УДК 531.36

В. Т. Аванян

О K_{Δ}^{ω} -устойчивости на заданном интервале времени

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 10/XI 1998)

Рассматривается задача о K_{Δ}^{ω} -устойчивости на бесконечном интервале времени в постановке (1), применяемой и на конечном интервале времени. Получены: а) достаточные условия K_{Δ}^{ω} -устойчивости и асимптотической устойчивости системы с почти постоянной матрицей, б) достаточное условие K_{Δ}^{ω} -устойчивости линейной системы, матрица которого перестановочна со своим интегралом.

1. Постановка задачи (1). Под классом K_{Δ}^{ω} подразумевается совокупность $n \times n$ матриц $G(t) = (G_1(t), \dots, G_n(t))$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на $\Delta = [t_0, \infty)$ условиям: а) $|\det G(t)| \geq K > 0$, б) эрмитова норма столбцов $G_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) совпадает с заданной функцией $\omega(t) > 0$, т.е. $\|G_j(t)\| = \omega(t)$ ($j = 1, \dots, n$).

Этот класс вполне определяется промежутком Δ и функцией $\omega(t) > 0$, причем $K_{\Delta}^{\omega} = \omega K_{\Delta}^1$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Невозмущенный процесс называется устойчивым, если в заданном классе K_{Δ}^{ω} существует такая матрица $G(t)$, что при достаточно малом $\rho > 0$ числе любое возмущение $x(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) процесса, начальное значение $x(t_0) = x_0$ которого удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0)x_0, G^{-1}(t_0)x_0) \leq \rho^2, \tag{1.1}$$

для всех $t > t_0$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t)x(t), G^{-1}(t)x(t)) \leq \rho^2, \tag{1.2}$$

в противном случае процесс называется неустойчивым.

О п р е д е л е н и е 1.2. Невозмущенный процесс называется асимптотически устойчивым на интервале $[a, \infty)$, если: а) он устойчив на $[a, \infty)$ (в

смысле определения 1.1); б) $\forall t_0 \in [a, \infty) \exists \rho = \rho(t_0) > 0$ такое, что все возмущения $x(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) процесса, удовлетворяющие условию (1.1), обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (1.3)$$

Из устойчивости в смысле определения 1.1 всегда следует устойчивость по Ляпунову, а обратное имеет место не всегда (2).

2. Теорема 2.1. Если система

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.1)$$

где A — постоянная, $n \times n$ — матрица, K_{Δ}^{ω} -устойчива, то система

$$\dot{y} = [A + B(t)]y, \quad (2.2)$$

где $B(t) \in C(\Delta)$ и

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, \quad (2.3)$$

также K_{Δ}^{ω} -устойчива.

Доказательство. Полагая, что $t_0 = 0$, $X(t)$ ($0 \leq t < \infty$) — фундаментальная матрица системы (2.1) и $X(0) = E$ (E — единичная матрица), каждое решение $y(t)$ (возмущение) системы (2.2) будет удовлетворять интегральному уравнению

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau \quad (t \geq 0). \quad (2.4)$$

В силу устойчивости системы (2.1) $\|X(t)\| \leq K$ ($t \in \Delta$) (2).

Из (2.4) имеем

$$\|y(t)\| \leq K\|y_0\| \exp \left[K \int_0^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau \right] < \infty,$$

согласно которому в силу (2.3) для матрицы $f(t) = B(t)y(t)$ в Δ будем иметь

$$\|f(t)\| \leq \|B(t)\| \cdot \|y(t)\| < \infty. \quad (2.5)$$

В силу (2.5) по теореме 1 (3) тривиальное решение системы (2.2) (т.е. невозмущенный процесс), будет K_{Δ}^{ω} -устойчивым.

Теорема 2.2. Если система (2.1) K_{Δ}^{ω} -асимптотически устойчива и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0, \quad (2.6)$$

то возмущенная система (2.2) также K_{Δ}^{ω} -асимптотически устойчива.

Доказательство. Каждое решение $y(t)$ системы (2.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)d\tau, \quad (t \in \Delta), \quad (2.7)$$

откуда, применяя лемму Гронуолла - Беллмана и учитывая неравенство

$$\|e^{At}\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)t}, \quad 0 < c = \text{const}, \quad t \in \Delta,$$

получаем

$$\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\| \exp \left[(\alpha + \varepsilon)(t - t_0) + c \int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau \right]. \quad (2.8)$$

По правилу Лопиталья, обобщенному Штольцем, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0.$$

Значит $\int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau < \varepsilon(t - t_0)$ при $t > T$.

Таким образом,

$$\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\| \exp[(\alpha + 2\varepsilon)(t - t_0)] \quad \text{при } t > T. \quad (2.9)$$

В случае K_{Δ}^{ω} -асимптотической устойчивости системы (2.1) имеем $\max \operatorname{Re} \lambda_j(A) = \alpha < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) (2), следовательно, выбирая число $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $\alpha + 2\varepsilon < 0$, из (2.9) получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0.$$

Теорема доказана.

3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = P(t)x, \quad (3.1)$$

где $P(t) \in C(\Delta)$ и

$$P(t) \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \cdot P(t), \quad t \in \Delta. \quad (3.2)$$

Общее решение (3.1), в силу (3.2), имеет вид

$$x(t) = x(t_0) \exp \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = A, \quad (A = \text{const}) \quad (3.4)$$

и все собственные значения $\lambda_j(A)$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.5)$$

то тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (3.1) (т.е. невозмущенный процесс) K_Δ^ω -асимптотически устойчиво.

Доказательство. В силу (3.2)

$$\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \cdot A = A \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Из (3.4) следует

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = A + B(t), \quad \text{где } \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0. \quad (3.7)$$

В силу (3.5) $\max \operatorname{Re} \lambda_j(A) < \alpha < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), поэтому число $\varepsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство $\alpha + 2\varepsilon < 0$.

Из (3.7) следует, что $\|B(t)\| < \varepsilon$, $t \in [T, \infty) \subset [t_0, \infty)$. Таким образом, из (3.3) получаем, что тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (3.1) (т.е. невозмущенный процесс) K_Δ^ω -асимптотически устойчиво на $[t_0, \infty)$.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Վ. Տ. ԱՎԱՆՅԱՆ

Ժամանակի տրված ինտերվալում K_Δ^ω -կայունության տեսության մասին

Դիտարկվում է ժամանակի անվերջ ինտերվալում K_Δ^ω -կայունության խնդիրը, որը կիրառվել է նաև վերջավոր ինտերվալում: Ստացվել են. ա) համարյա հաստատուն մատրիցայով համակարգի կայունության և ասիմպտոտիկ կայունության պայմաններ. բ) գծային համակարգի կայունության պայման, երբ նրա մատրիցան տեղափոխելի է իր ինտեգրալի հետ:

ЛИТЕРАТУРА – ՉԲԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К.А.Абгарян, Итоги науки и техники. Общая механика, М., т.3, с.43-124, 1976.
- ² К.А.Абгарян, В.Т.Аванян, ПММ, т.41, вып.5, с.844-849 (1977).
- ³ В.Т.Аванян, Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем, (сб. научных трудов конференции). Ереван, с.10-12, 1997.