ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №2

МАТЕМАТИКА

УДК 519.68:510

С. А. Нигиян, Л. О. Хачоян

К проблеме Δ-эквивалентности логических программ

(Представлено академиком НАН Армении Н.У.Аракеляном 4/IX 1998)

В ([1]) введено отношение Δ-эквивалентности логических программ, согласно которому две логические программы будут Δ-эквивалентными, если множество запросов, являющихся логическим следствием одной из программ, совпадает с множеством запросов, являющихся логическим следствием другой программы. В данной работе под логической программой мы будем понимать хорновскую программу, т.е. программу, предложениями которой являются хорновские дизъюнкты (см.([2])). Из ([1]) следует неразрешимость проблемы Δ-эквивалентности хорновских программ. В предлагаемой работе разрабатывается методика так называемых шаблонов наименьших моделей логических программ, которая позволяет устанавливать разрешимость отношения Δ-эквивалентности в некоторых классах логических программ, в частности в тех классах программ, для которых такие шаблоны конечны.

1. *Используемые определения и результаты.* Зафиксируем три непересекающихся счетных множества $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{X}$. $\mathcal{F}$ – множество функциональных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$ $\mathcal{F}$ содержит счетное число символов местности n. $\mathcal{X}$ – множество (предметных) переменных. Из элементов множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{X}$ строятся термы. Через H обозначим множество всех термов, не использующих переменных. $\mathcal{P}$ – множество предикатных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$ $\mathcal{P}$ содержит счетное число символов местности n.

Атом определяется традиционным образом. Атом, не использующий переменных, назовем основным. Традиционным образом определяется формула логики предикатов первого порядка, использующая логические операции $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ и кванторы $\exists$, $\forall$.

Напомним определения подстановки, унификатора, наиболее общего унификатора, взятые из ([2]). Подстановка σ есть множество вида: $\{t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n\}$, где t_i – терм, x_i – переменная, $t_i \neq x_i, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$,

$i, j = 1,\ldots,n,\ n \geq 0$. Естественным образом вводится композиция подстановок, которая является ассоциативной операцией.

Пусть A – атом. Через $A\sigma$ обозначим атом, полученный из A путем одновременной подстановки термов $t_1,\ldots,t_n$ вместо переменных $x_1,\ldots,x_n$ соответственно. Напомним, что для любых подстановок σ, δ и атома A имеем: $(A\sigma)\delta = A(\sigma\delta)$.

Подстановку δ назовем унификатором атомов A_1 и A_2, если $A_1\delta = = A_2\delta$. Унификатор σ назовем наиболее общим унификатором атомов A_1 и A_2 $(\sigma = \mathrm{mgu}(A_1, A_2))$, если для любого их унификатора δ существует подстановка γ такая, что $\sigma\gamma = \delta$.

Опишем рассматриваемые нами интерпретации. Предметным множеством рассматриваемых интерпретаций будет множество H. Функциональные символы интерпретируются следующим образом: каждому 0-местному символу из $\mathcal{F}$ сопоставляется он сам, каждому n-местному ($n > 0$) символу $f \in \mathcal{F}$ сопоставляется отображение $H^n \to H$, которое n-ке $< t_1,\ldots,t_n >$, где $t_i \in H$, $i = 1,\ldots,n$, ставит в соответствие терм $f(t_1,\ldots,t_n)$. Каждому 0-местному символу из $\mathcal{P}$ сопоставляется один из элементов множества $\{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$, а каждому n-местному ($n > 0$) символу из $\mathcal{P}$ сопоставляется некоторое отображение $H^n \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$. Обозначим описанное множество интерпретаций через Int. Заметим, что интерпретации из Int могут отличаться одна от другой лишь отображениями, сопоставляемыми символам множества $\mathcal{P}$. Поэтому каждую интерпретацию $I \in \mathrm{Int}$ можно отождествлять с множеством тех основных атомов, значения которых на I есть true. Легко видеть, что множество Int будет полной решеткой, если в качестве частичного порядка на Int взять отношение включения.

Логическая программа P (далее просто программа) есть множество предложений $\{S_1,\ldots,S_u\}$, $u > 0$. Предложение S_i является либо фактом A_i, либо правилом $A_i : -B_{i1},\ldots,B_{im_i}$ представляющим собой хорновский дизъюнкт $A_i \vee \neg B_{i1} \vee \ldots \vee B_{im_i}$, где $A_i, B_{i1},\ldots,B_{im_i}$ – атомы $m_i > 0, i = 1,\ldots,u$. Пусть $\{x_1,\ldots,x_v\}$ есть множество всех переменных, использованных программой P, $v \geq 0$. Программе P сопоставим формулу $F(P)$:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_v (S_1 \& \ldots \& S_u).$$

Всякую модель формулы $F(P)$ условимся называть моделью программы P. Известно (см.[2]) что всякая программа P имеет наименьшую модель I_P. Каждой программе P сопоставляется отображение $\Psi_P : \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}$ следующим образом. Пусть $I \in \mathrm{Int}$ и A_0 – основной атом, тогда: $A_0 \in \Psi_P(I) \Leftrightarrow$ существуют предложение $A:-B_1,\ldots,B_m \in P$ $(m \geq 0)$ и подстановка θ такие, что $A\theta = A_0$ и $\{B_1\theta,\ldots,B_m\theta\} \subset I$.

Для всякой программы P (см.((2)) имеем:

$I_P = \sup\{\Psi_P^k(\varnothing) | k \geq 0\}$, где $\Psi_P^0(\varnothing) = \varnothing$, $\Psi_P^{k+1}(\varnothing) = \Psi_P(\Psi_P^k(\varnothing))$, $k \geq 0$.

Введем понятие запроса. Запрос Q имеет вид: $?-C,\ldots,C_k$ где C_i – атом, $i = 1,\ldots,k$, $k > 0$. Пусть $\{y_1,\ldots,y_r\}$ есть множество всех переменных, использованных запросом Q, $r \geq 0$. Запросу Q сопоставим формулу $F(Q)$:

$$\exists y_1 \ldots \exists x_r (C_1 \& \ldots \& C_k).$$

Будем говорить, что запрос Q логически следует из программы P, если формула $F(P) \supset F(Q)$ принимает значение true на любой интерпретации из Int.

2. *Δ-эквивалентность логических программ.* Пусть P программа. Через Yes (P) обозначим множество всех запросов, которые логически следуют из программы P. Программы P_1 и P_2 назовем *Δ-эквивалентными* (обозначим $P_1 \sim P_2$), если $\text{Yes}(P_1) = \text{Yes}(P_2)$. Из (1) следует неразрешимость проблемы Δ-эквивалентности логических программ, более того ни сама эта проблема, ни ее дополнение не являются частично разрешимыми.

Утверждение 1. *Пусть P_1 и P_2 – программы, тогда:*

$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow I_{P_1} = I_{P_2}$$

Будем говорить, что атом A предшествует атому B (и обозначать $A \prec B$), если существует такая подстановка σ, что $A\sigma = B$. Легко видеть, что отношение предшествования является рефлексивным и транзитивным.

Будем говорить, что атом A конгруэнтен атому B (и обозначать $A \equiv B$), если $A \prec B$ и $B \prec A$. Легко видеть, что отношение конгруэнтности является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Можно показать, что отношения предшествования и конгруэнтности атомов являются разрешимыми.

Будем говорить, что множество атомов $\mathcal{A}_1$ конгруэнтно множеству атомов $\mathcal{A}_2$ (и обозначать $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$), если существует такое взаимнооднозначное отображение φ множества $\mathcal{A}_1$ на множество $\mathcal{A}_2$, что $A \equiv \varphi(A)$ для любого атома $A \in \mathcal{A}_1$.

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторое множество атомов. Множество атомов $\mathcal{B}$ назовем сверткой множества $\mathcal{A}$ если:

1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$;
2) $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$, и $A \prec B \Rightarrow A = B$
3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow$ существует такой атом $B \in \mathcal{B}$, что $B \prec A$.

Легко видеть, что любые две свертки множества $\mathcal{A}$ конгруэнтны. Условимся свертку множества $\mathcal{A}$ обозначать $\mathcal{A}^*$. Очевидно, что $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_1^* \equiv \mathcal{A}_2^*$, где $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ – множества атомов.

Пусть P – программа. Для каждого $i \geq 1$ введем понятие i-подшаблона наименьшей модели программы P (кратко i-подшаблон I_P). $K_P^1 = \mathrm{Facts}_P^*$ – i-подшаблон I_P, где Facts_P множество фактов программы P. Пусть $i \geq 1$ и K_P^i – i-подшаблон I_P. Определим $\widetilde{K}_P^{i+1}$: $A \in \widetilde{K}_P^{i+1} \Leftrightarrow$ существуют такие правило $S \in P$, имеющее вид $B :- B_1, \dots, B_m$, и последовательность атомов $A_1, \dots, A_m$ не имеющих общих переменных как между собой, так и с правилом S, что: 1) для каждого $j = 1, \dots, m$ существует атом $A'_j \in K_P^i$ такой, что $A_j \equiv \equiv A'_j$; 2) существуют подстановки $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ такие, что $\sigma_1 = \mathrm{mgu}(A_1, B_1)$, $\sigma_2 = \mathrm{mgu}(A_2, B_2\sigma_1), \dots, \sigma_m = \mathrm{mgu}(A_m, B_m\sigma_1 \dots \sigma_{m-1})$ и $A = B\sigma_1 \dots \sigma_m$.

$$K_P^{i+1} = (K_P^i \cup \widetilde{K}_P^{i+1})^*.$$

Легко видеть, что для всякого $i \geq 1$ любые два i-подшаблона I_P конгруэнтны.

Утверждение 2. *Для всяких программы P, основного атома A_0 и $i \geq 1$ имеем: $A_0 \in \Psi_P^i(\varnothing) \Leftrightarrow$ существует такой атом $A \in K_P^i$, что $A \prec A_0$.*

Введем понятие ***шаблона наименьшей модели программы*** P (кратко шаблона I_P). Определим сначала множество атомов $\widetilde{K}_P : A \in \widetilde{K}_P \Leftrightarrow$ существует такое $i_0 \geq 1$, что для каждого $i \geq i_0$ существует такой атом $A_i \in K_P^i$, что $A \equiv A_i$. Шаблоном I_P назовем множество $K_P = \widetilde{K}_P^*$. Легко видеть, что любые два шаблона I_P конгруэнтны.

Утверждение 3. *Для всяких программы P, атома A и $i \geq 1$ имеем: $A \in K_P^i \Rightarrow$ существует такой атом $B \in K_P$, что $B \prec A$.*

Из утверждения 2 и утверждения 3 следует утверждение 4.

Утверждение 4. *Для всяких программы P и основного атома A_0 имеем: $A_0 \in I_P \Leftrightarrow$ существует такой атом $A \in K_P$, что $A \prec A_0$.*

Используя утверждение 4, доказываем утверждение 5.

Утверждение 5. *Пусть P_1, P_2 – программы, тогда:*

$$I_{P_1} = I_{P_2} \Leftrightarrow K_{P_1} \equiv K_{P_2}.$$

Из утверждения 1 и утверждения 5 следует теорема 1.

Теорема 1. *Пусть P_1, P_2 – программы, тогда:*

$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow K_{P_1} \equiv K_{P_2}$$

Из теоремы 1 и разрешимости отношений предшествования и конгруэнтности атомов следует теорема 2.

Т е о р е м а 2. *Если для некоторого класса программ* Prog *имеем:* $P \in \mathrm{Prog} \Rightarrow K_P$ *– конечно, то проблема* Δ*-эквивалентности в классе* Prog *разрешима.*

Из теоремы 2 следует теорема 3.

Т е о р е м а 3. *Проблема* Δ*-эквивалентности разрешима для программ, не использующих функциональных символов местности >0.*

Отметим, что в случае использования функциональных символов местности >0 проблема Δ-эквивалентности логических программ не является разрешимой (см. [1]).

Ереванский государственный университета

Ս. Ա. ՆԻԳԻՅԱՆ, Լ. Յ. ԽԱՉՈՅԱՆ

Տրամաբանական ծրագրերի Δ-համարժեքության պրոբլեմի մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է տրամաբանական ծրագրերի Δ-համարժեքության պրոբլեմը: Երկու տրամաբանական ծրագրեր կոչվում են Δ-համարժեք, եթե այդ ծրագրերից մեկի տրամաբանական հետևանքը հանդիսացող հարցումների բազմությունը համընկնում է մյուս ծրագրի տրամաբանական հետևանքը հանդիսացող հարցումների բազմության հետ:

Այս աշխատանքում տրամաբանական ծրագիր ասելով հասկանում ենք Հոռնի ծրագիրը, այսինքն այն ծրագիրը, որի նախադասությունները Հոռնի դիզյունկտներն են: Հայտնի է, որ Հոռնի ծրագրերի Δ-համարժեքության պրոբլեմը լուծելու չէ:

Ներկա աշխատանքում մշակվում է տրամաբանական ծրագրերի փոքրագույն մոդելների, այսպես կոչված նմուշների մեթոդիկան, որը թույլ է տալիս հաստատել Δ-համարժեքության հարաբերության լուծելիությունը տրամաբանական ծրագրերի որոշ դասերում, մասնավորապես, ծրագրերի այնպիսի դասերում, որոնց համար այդպիսի նմուշները վերջավոր են:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С.А.Нигиян, Л.О.Хачоян*, Программирование, №6, с.17-28, 1997. [2] *J.W.Lloyd*, Foundations of logic programming, Springer-Verlag, 1984.