

УДК 519.68:510

С. А. Нигиян, Л. Э. Будагян

Правила вычисления главной функции наименьшего решения для одного класса систем рекурсивных уравнений

(Представлено академиком НАН Армении А.Б.Нерсисяном 23/XII 1998)

В работе рассматривается класс систем уравнений Σ , использующих переменные монотонных типов любых порядков и монотонные константы порядков ≤ 1 , причем константы порядка 1 являются вычислимыми функциями. Каждое уравнение системы $P \in \Sigma$ имеет вид $F = \tau$, где F – переменная, τ – λ -терм и тип терма τ согласован с типом переменной F . Из (1) следует, что всякая система $P \in \Sigma$ имеет наименьшее решение. Главную функцию этого решения (функцию, соответствующую первому уравнению системы и принадлежащую монотонному типу порядка 1) будем считать функцией, определяемой системой P , и обозначать f_P . Нами вводится понятие правила вычисления ρ , основанного на подстановке правых частей уравнений системы вместо некоторых свободных вхождений переменных и последующем редуцировании полученного терма. Показано, что для любых $P \in \Sigma$ и ρ функция f_P является продолжением функции, соответствующей правилу вычисления ρ . Определяется пять конкретных правил вычисления и доказывается, что лишь два из них являются полными, то есть соответствующие им функции совпадают с f_P .

1. Термы, эквивалентность, редукция, нормальная форма. Зафиксируем непустое множество M . Введем понятие типа: 1) множество M есть тип; 2) любое непустое подмножество типа есть тип; 3) если $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) – типы то множество всех отображений из $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k$ в β (обозначим $\{\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta\}$) есть тип; 4) других типов кроме определенных согласно 1-3, нет. Каждому типу α сопоставим натуральное число $ord(\alpha)$, называемое его порядком. Если $\alpha \subset M$, то $ord(\alpha) = 0$, если же $\alpha \subset \{\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta\}$, где $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) – типы, то $ord(\alpha) = \max(ord(\alpha_1), \dots, ord(\alpha_k))$,

$ord(\beta)) + 1$. Если x — переменная типа α , $c \in \alpha$ и $ord(\alpha) = n \geq 0$, то x — переменная порядка n ($ord(x) = n$), а c — константа порядка n ($ord(c) = n$). Будем считать, что для каждого типа α мы имеем счетное множество переменных типа α .

Введем понятие терма. Каждому терму t сопоставим:

- множество свободных переменных терма t — $Var(t)$;
- тип терма t — $Type(t)$;
- если $Var(t) \subset \{y_1, \dots, y_n\}$, $n > 0$, $\bar{y}_0 = \langle y_1^0, \dots, y_n^0 \rangle$, где $y_i^0 \in \alpha_i$, α_i — тип переменной y_i , то терму t сопоставим константу $Val_{\bar{y}_0}(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Определение терма:

1. Всякая константа c есть терм, $Var(c) = \emptyset$, $Val_{\bar{y}_0}(c) = c$, $Type(c) = \{c\}$.
2. Всякая переменная x есть терм, $Var(x) = \{x\}$, $Val_{\bar{y}_0}(x) = y_i^0$, если $x = y_i$ ($1 \leq i \leq n$), $Type(x) = \alpha$, где α — тип переменной x .
3. Пусть $\tau, t_1, \dots, t_k$ — термы, $k > 0$, $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ — типы, такие, что $Type(\tau) \subset \{\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta\}$, $Type(t_i) \subset \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$, тогда $\tau(t_1, \dots, t_k)$ есть терм и $(t_1, \dots, t_k)$ есть область действия аппликатора τ .

$$Var(\tau(t_1, \dots, t_k)) = Var(\tau) \cup Var(t_1) \cup \dots \cup Var(t_k),$$

$$Val_{\bar{y}_0}(\tau(t_1, \dots, t_k)) = Val_{\bar{y}_0}(\tau)(Val_{\bar{y}_0}(t_1), \dots, Val_{\bar{y}_0}(t_k)),$$

$$Type(\tau(t_1, \dots, t_k)) = \{Val_{\langle y_1^0, \dots, y_n^0 \rangle}(\tau(t_1, \dots, t_k)) \mid y_i^0 \in Type(y_i), i = 1, \dots, n\}.$$

4. Пусть τ — терм, $x_1, \dots, x_k$ — переменные ($k > 0$) и, если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$ ($1 \leq i, j \leq k$), тогда $\lambda x_1 \dots x_k [\tau]$ есть терм и терм τ есть область действия абстрактора $\lambda x_1 \dots x_k$.

$$Var(\lambda x_1 \dots x_k [\tau]) = Var(\tau) \setminus \{x_1, \dots, x_k\},$$

$$Val_{\bar{y}_0}(\lambda x_1 \dots x_k [\tau]) \in \{Type(x_1) \times \dots \times Type(x_k) \rightarrow Type(\tau)\}$$

и, если $Var(\lambda x_1 \dots x_k [\tau]) = \{y_1, \dots, y_m\}$, $0 \leq m \leq n$, $\bar{y}_0' = \langle y_1^0, \dots, y_m^0 \rangle$, то для всяких $x_j^0 \in Type(x_j)$, $j = 1, \dots, k$, $Val_{\bar{y}_0}(\lambda x_1 \dots x_k [\tau])(\bar{x}_0) = Val_{\bar{x}_0, \bar{y}_0'}(\tau)$, где $\bar{x}_0 = \langle x_1^0, \dots, x_k^0 \rangle$, $Type(\lambda x_1 \dots x_k [\tau])$ определяется так же, как в п.3.

5. Никаких других термов, кроме определенных согласно 1—4, нет.

Пусть t — терм, тогда некоторое вхождение переменной x в терм t назовем связанным, если оно либо принадлежит некоторому абстрактору, либо находится в области действия абстрактора, использующего x . Любое другое вхождение переменной x в терм t назовем свободным.

Пусть t_1, t_2 – термы и $Var(t_1) \cup Var(t_2) = \{y_1, \dots, y_m\}$ ($m \geq 0$), термы t_1 и t_2 назовем эквивалентными (обозначим $t_1 \sim t_2$), если для любого $\bar{y}_0 = \langle y_1^0, \dots, y_m^0 \rangle$, где $y_i^0 \in Type(y_i)$, $i = 1, \dots, m$, имеем: $Val_{\bar{y}_0}(t_1) = Val_{\bar{y}_0}(t_2)$.

Через t_{τ_1} обозначим терм t с некоторым фиксированным вхождением подтерма τ_1 , а через t_{τ_2} – терм, полученный в результате замены данного вхождения τ_1 на τ_2 .

Теорема 1 (о замене). Пусть τ_1, τ_2 – термы, t_{τ_1} – терм с некоторым фиксированным вхождением τ_1 , тогда

$$\tau_1 \sim \tau_2 \Rightarrow t_{\tau_1} \sim t_{\tau_2}.$$

Доказательство проводится индукцией по глубине фиксированного вхождения подтерма τ_1 .

Пусть t – терм, $Var(t) \subset \{y_1, \dots, y_n\}$ и $t_1, \dots, t_n$ ($n > 0$) – некоторые термы. Одновременную подстановку термов $t_1, \dots, t_n$ в терм t вместо некоторых свободных вхождений переменных $y_1, \dots, y_n$ соответственно назовем допустимой, если ни одно из рассматриваемых вхождений переменной y_i не находится в области действия абстрактора, использующего некоторую свободную переменную терма t_i , $i = 1, \dots, n$.

Пусть t – терм, $Var(t) \subset \{y_1, \dots, y_n\}$ и $t_1, \dots, t_n$ ($n > 0$) – некоторые термы. Рассмотрим все свободные вхождения переменных $y_1, \dots, y_n$ в терм t и предположим, что одновременная подстановка термов $t_1, \dots, t_n$ вместо всех свободных вхождений переменных $y_1, \dots, y_n$ соответственно является допустимой. Тогда терм, полученный в результате такой подстановки, условимся обозначать $t\{t_1 / y_1, \dots, t_n / y_n\}$.

Терм вида $\lambda x_1 \dots x_k [\tau]$ назовем α -редексом, а терм $\lambda x_1 \dots x'_i \dots x_k [\tau\{x'_i / x_i\}]$, где x'_i – переменная, $Type(x'_i) = Type(x_i)$, $x'_i \notin \{x_1, \dots, x_k\}$ и x'_i не свободна в τ , – α -сверткой терма $\lambda x_1, \dots, x_k [\tau]$, $i = 1, \dots, k$, $k > 0$.

Терм вида $\lambda x_1 \dots x_k [\tau] (t_1, \dots, t_k)$ назовем β -редексом, а терм $\tau\{t_1 / x_1, \dots, t_k / x_k\}$ – β -сверткой терма $\lambda x_1 \dots x_k [\tau] (t_1, \dots, t_k)$, $k > 0$.

Терм вида $f(t_1, \dots, t_k)$, где f – константа, $k > 0$, назовем δ -редексом, если либо а) $Type(f(t_1, \dots, t_k)) = \{c\}$, где c – константа, либо б) $f(t_1, \dots, t_k) \sim \tau$, где τ – собственный подтерм терма $f(t_1, \dots, t_k)$. Если $f(t_1, \dots, t_k)$ – δ -редекс, то δ -сверткой терма $f(t_1, \dots, t_k)$ назовем константу c в случае а) и терм τ – в случае б).

Введем понятие редукции $\varepsilon \in \{\alpha, \beta, \delta\}$.

$$\varepsilon = \{ \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \mid \tau_1 - \varepsilon\text{-редекс, } \tau_2 - \varepsilon\text{-свертка терма } \tau_1 \}$$

Будем говорить, что терм t' получен посредством одношаговой ε -редукции из терма t (обозначим $t \rightarrow_\varepsilon t'$), если существуют такие термы τ_1 и τ_2 , что t есть t_{τ_1} , t' есть t_{τ_2} и $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \in \varepsilon, \varepsilon \in \{\alpha, \beta, \delta\}$.

Будем говорить, что терм t' получен посредством редукции из терма t (обозначим $t \rightarrow^* t'$), если либо t совпадает с t' , либо существует последовательность одношаговых редукций $t \rightarrow_{\varepsilon_0} t_1 \rightarrow_{\varepsilon_1} \dots \rightarrow_{\varepsilon_{n-1}} t_n \rightarrow_{\varepsilon_n} t'$, где t_i — терм, $\varepsilon_i \in \{\alpha, \beta, \delta\}, i = 0, \dots, n, n \geq 0$.

Теорема 2 (о редукции). Пусть t, t' — термы, тогда

$$t \rightarrow^* t' \Rightarrow t \sim t'.$$

Доказательство использует теорему 1.

Будем говорить, что терм t находится в нормальной форме, если t не содержит β и δ -редексов.

Теорема 3 (о нормальной форме). Для всякого терма t существует терм τ , находящийся в нормальной форме такой, что $t \rightarrow^* \tau$.

Доказательство основано на том, что типовое λ -исчисление является сильно нормализуемой теорией (2).

2. Системы уравнений, главная функция наименьшего решения, правила вычисления, полнота. Рассмотрим систему уравнений P :

$$\begin{cases} F_1 = \tau_1 \\ \dots \\ F_n = \tau_n, \end{cases} \quad (1)$$

где F_i — переменная и, если $i \neq j$, то $F_i \neq F_j$, τ_i — терм, $Type(\tau_i) \subset Type(F_i)$, $Var(\tau_i) \subset \{F_1, \dots, F_n\}$, $i, j = 1, \dots, n, n \geq 1$. Отображение $\Psi_P: Type(F_1) \times \dots \times Type(F_n) \rightarrow Type(F_1) \times \dots \times Type(F_n)$ такое, что $\Psi_P(\bar{g}) = \langle Val_{\bar{g}}(\tau_1), \dots, Val_{\bar{g}}(\tau_n) \rangle$, где $\bar{g} \in Type(F_1) \times \dots \times Type(F_n)$, назовем отображением, соответствующим системе уравнений (1); через $(\bar{g})_i$ условимся обозначать i -ую компоненту вектора $\bar{g}$, $i = 1, \dots, n$. Будем говорить, что $\bar{f} \in Type(F_1) \times \dots \times Type(F_n)$ есть решение системы (1), если $\Psi_P(\bar{f}) = \bar{f}$. Легко заметить, что не всякая система уравнений вида (1) имеет решение. Нас будут интересовать так называемые монотонные системы уравнений вида (1), для которых решение существует всегда.

Пусть A, B — частично упорядоченные множества и f, g — некоторые отображения из A в B , тогда $f \prec g$, если для любого $a \in A$, $f(a) \prec g(a)$

($\prec$ — символ частичного порядка); f — монотонное отображение, если для любых $a, b \in A$ таких, что $a \prec b$, имеем $f(a) \prec f(b)$.

Пусть M — частично упорядоченное множество, содержащее наименьший элемент $\perp$, и каждый элемент из M сравним только с $\perp$ и с самим собой. Введем понятие монотонного типа: 1) множество M есть монотонный тип; 2) если $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) — монотонные типы, то множество всех монотонных отображений из $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k$ в β (обозначим $[\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta]$) есть монотонный тип; 3) других монотонных типов, кроме определенных согласно 1–2, нет. Константы и переменные монотонных типов условимся называть монотонными; термы, использующие только монотонные константы и переменные, — монотонными термами; системы уравнений (1), использующие только монотонные константы и переменные, — монотонными системами уравнений. В (1) показано, что всякая монотонная система уравнений имеет наименьшее решение (теорема 2). Определим интересующее нас подмножество монотонных систем уравнений Σ . Монотонная система уравнений P вида (1) принадлежит к классу Σ , если всякая константа порядка 1, используемая системой P , является вычислимой функцией, система P не использует констант, порядок которых > 1 , и $Type(F_1) = [M^k \rightarrow M]$ для некоторого $k \geq 1$. Уравнение $F_1 = \tau_1$ назовем главным уравнением системы P , а функцию $f_p = (\bar{f})_1$, где $\bar{f}$ — наименьшее решение системы P , главной функцией наименьшего решения системы P .

Лемма 1 (о главной функции наименьшего решения). Для любой системы уравнений $P \in \Sigma$, имеющей вид (1), и $\bar{m} \in M^k$, где $Type(F_1) = [M^k \rightarrow M]$ ($k \geq 1$), имеем:

$$f_p(\bar{m}) = \sup \left\{ \left(\Psi_p^i(\Omega) \right)_1(\bar{m}) \mid i < \omega \right\},$$

где Ω — наименьший элемент множества $Type(F_1) \times \dots \times Type(F_n)$, $\Psi_p^0(\Omega) = \Omega$, $\Psi_p^{i+1}(\Omega) = \Psi_p(\Psi_p^i(\Omega))$, $i < \omega$, ω — ординал, соответствующий натуральному ряду.

Доказательство следует из работы (3) (лемма 2).

Введем понятие правила вычисления ρ . Пусть система уравнений $P \in \Sigma$ имеет вид (1). Правило вычисления ρ по каждому терму t такому, что $Var(t) \subset \{F_1, \dots, F_n\}$, определяет, какие именно свободные вхождения переменных $F_1, \dots, F_n$ следует одновременно заменить на термы $\tau_1, \dots, \tau_n$ соответственно. Результат такой замены условимся обозначать $\rho(t)$. Естественно, что подстановка предполагается допустимой. Опреде-

лим вычислительную последовательность $t_1, t_2, \dots$, соответствующую системе $P \in \Sigma$, правилу ρ и $\bar{m} \in M^k$, где $Type(F_1) = [M^k \rightarrow M]$ ($k \geq 1$):

t_1 есть терм $F_1(\bar{m})$;

t_{i+1} есть терм, находящийся в нормальной форме, такой, что $\rho(t_i) \rightarrow \rightarrow t_{i+1}, i \geq 1$.

Корректность данного определения следует из теоремы 3. Определим функцию f_ρ^P , соответствующую системе P и правилу ρ : если для всех $i \geq 1$ $t_i \notin M$, то $f_\rho^P(\bar{m}) = \perp$; если для некоторого $i_0 \geq 1$ $t_{i_0} \in M$, то $f_\rho^P(\bar{m}) = t_{i_0}$.

Теорема 4 (о функции, соответствующей правилу вычисления). Для всяких системы уравнений $P \in \Sigma$ и правила вычисления ρ имеем:

$$f_\rho^P \prec f_\rho.$$

Доказательство использует теорему 2 и лемму 1.

Правило вычисления ρ назовем полным, если для всякой системы уравнений $P \in \Sigma$ имеем: $f_\rho^P = f_\rho$. Перед тем как определить конкретные правила вычисления, введем два понятия.

Свободное вхождение переменной F в терм t назовем внутренним, если оно не входит в аппликатор τ , область действия которого содержит свободное вхождение (в терм t) некоторой переменной.

Свободное вхождение переменной F в терм t назовем внешним, если оно не входит в область действия аппликатора τ , содержащего свободное вхождение (в терм t) некоторой переменной.

Определим пять правил вычисления.

1. **Правило самой левой внутренней замены:** заменяется самое левое внутреннее свободное вхождение переменной.

2. **Правило параллельной внутренней замены:** заменяются одновременно все внутренние свободные вхождения переменных.

3. **Правило самой левой (внешней) замены:** заменяется самое левое (внешнее) свободное вхождение переменной.

4. **Правило параллельной внешней замены:** заменяются одновременно все внешние свободные вхождения переменных.

5. **Правило полной замены:** заменяются одновременно все свободные вхождения переменных.

Теорема 5 (о правилах вычисления).

Правила 1, 2, 3 не являются полными.

Правила 4, 5 — полные.

Правило 3 является полным для систем уравнений, использующих только естественно расширенные функции (константы порядка 1).

Заметим, что функция $f \in [M^k \rightarrow M]$ ($k \geq 1$) называется естественно расширенной, если $f(\dots, \perp, \dots) = \perp$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ՆԻԳԻՅԱՆ, Լ. Է. ԲՈՒԴԱՂՅԱՆ

Փոքրագույն լուծման գլխավոր ֆունկցիայի հաշվարկման կանոններ ռեկուրսիվ հավասարումների համակարգերի մի դասի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է այնպիսի հավասարումների համակարգերի Σ դաս, որոնք օգտագործում են ցանկացած կարգի մոնոտոն տիպի փոփոխականներ $k \leq 1$ կարգի մոնոտոն հաստատումներ, ընդ որում առաջին կարգի հաստատումները հաշվարկելի ֆունկցիաներ են: $P \in \Sigma$ համակարգի ամեն մի հավասարում ունի $F = \tau$ տեսք, որտեղ F -ը փոփոխական է, τ -ն —տերմ է, և τ տերմի տիպը համաձայնեցված է F փոփոխականի տիպի հետ: Հայտնի է, որ ցանկացած $P \in \Sigma$ համակարգ ունի փոքրագույն լուծում: Այդ լուծման գլխավոր ֆունկցիան (ֆունկցիան, որը համապատասխանում է համակարգի առաջին հավասարմանը և որի կարգը հավասար է 1-ի) կհամարենք P համակարգով որոշվող ֆունկցիա և նշանակենք այն f_P -ով: Մեր կողմից ներմուծվում է ρ հաշվարկման կանոնի հասկացություն, որը հիմնված է տերմի փոփոխականների որոշ ազատ մուտքերը P համակարգի հավասարումների աջ մասերով փոխարինման և ստացված տերմի հետագա պարզեցման (ռեդուկցիայի) վրա: Ցույց է տրվել, որ ցանկացած $P \in \Sigma$ համակարգի և ρ հաշվարկման կանոնի համար f_P -ն հանդիսանում է ρ հաշվարկման կանոնին համապատասխանող ֆունկցիայի շարունակություն: Սահմանվում է հինգ հաշվարկման կանոններ և ապացուցվում է, որ դրանցից միայն երկուսն են լրիվ, այսինքն՝ դրանց համապատասխանող ֆունկցիան համընկնում է f_P -ի հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С.А.Нигиян, Программирование, 1991, №5, с.77-86 (англ. пер. S.A.Nigiyany, Programming and Computer Software, v.17, №5, p.290-297 (1992)).
- ² H.P.Barendregt, The lambda calculus, its syntacs and semantics, Amsterdam, North Holand, 1981 (рус. пер. Х.Барендрегт Ламбда-исчисление, его синтаксис и семантика, М., Мир, 1985).
- ³ С.А.Нигиян, Программирование, №2, с.58-68, 1993 (англ. пер. S.A.Nigiyany, Programming and Computer Software, v.20, №2, p.69-75 (1994)).