ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

С. Г. Саакян, И. А. Варданян

Сдвиговые поверхностные волны в некоторых вертикально-неоднородных упругих средах

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 21/X 1998)

В настоящее время исследование распространения волн в неоднородных средах имеет многочисленные научные и технические приложения, поскольку во многих случаях таких приложений среда обладает существенной неоднородностью в распространении упругих свойств по объему. Известные результаты о поверхностных волнах, распространяющихся вдоль свободной границы однородных упругих тел, очень подробно изложены в ряде монографий ([1-3]). В работах ([2-7]) исследуется распространение волн в неоднородных средах при конкретных законах неоднородности среды.

В настоящей работе исследуется проблема распространения сдвиговых поверхностных волн (СПВ) в некоторых вертикально-неоднородных упругих полупространствах. Путем прямого анализа волнового уравнения антиплоской задачи выделены неоднородные упругие среды, в которых неоднородность вызывает СПВ. Далее приведено исследование СПВ.

1. Пусть вектор смещения в декартовой системе xyz имеет вид $\{o,o,w(x,y,t)\}$. Тогда уравнение Ламе антиплоского движения вертикально-неоднородной упругой среды при отсутствии внешних массовых сил записывается в форме

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где $c_s=\{\mu(y)/\rho(y)\}^{\frac{1}{2}}$ − скорость сдвиговой объемной волны, μ и ρ − модуль сдвига и плотность среды соответственно.

Используя закон Гука и условия, где напряжения на границе вертикально-неоднородного полупространства $y\geq h$ равны нулю, получим граничное условие

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=h}=0. \tag{1.2}$$

Ищем решение уравнения (1.1) в виде

$$w(x,y,t)=f(y)\exp[i(kx-\omega t)], \tag{1.3}$$

где $f(y)$ – неизвестная функция, ω и k – частота и волновое число синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси x.

Фактически рассматриваем свободные сдвиговые колебания вертикально-неоднородных упругих полупространств.

Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial f}{\partial y}-k^2(1-\xi)f=0, \tag{1.4}$$

где

$$\xi=\left(\frac{\omega}{kc_s}\right)^2=\left(\frac{v_\phi}{c_s}\right)^2,\ v_\phi=\frac{\omega}{k}.$$

Уравнение (1.1) путем замены переменной

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{\mu(y)}}\varphi(y) \tag{1.5}$$

записывается в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\left[k^2(1-\xi)+\nu\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)\right]\varphi=0, \tag{1.6}$$

где

$$\nu\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)\equiv\left(\frac{\mu'}{2\mu}\right)'+\left(\frac{\mu'}{2\mu}\right)^2.$$

Теперь рассмотрим такие вертикально-неоднородные упругие среды, для которых выполняются условия:

$$c_s=\text{const};\qquad \nu\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)=\frac{2}{y^2}. \tag{1.7}$$

Условие $c_s=\text{const}$ показывает, что изменение μ и ρ по глубине среды одинаково, т.е.

$$\frac{\mu}{\mu_0}\equiv\frac{\rho}{\rho_0}\equiv\nu(y). \tag{1.8}$$

Второе условие (1.7) является дифференциальным уравнением для определения неизвестной функции $\nu(y)$:

$$\nu\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)=\nu\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)\equiv\left(\frac{\nu'}{2\nu}\right)'+\left(\frac{\nu'}{2\nu}\right)^2=\frac{2}{y^2}. \tag{1.9}$$

Чтобы решить уравнение (1.9) при начальном условии $\mu(h)=\mu_0$, $\mu'(h)=$ $=\mu'_0$, положим

$$\frac{\nu'}{2\nu} = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dy}. \tag{1.10}$$

Тогда уравнение для определения η будет иметь вид

$$\frac{d^2\eta}{dy^2} - \frac{2}{y^2}\eta = 0; \tag{1.11}$$

это выражение является однородным уравнением Эйлера. Общим решением последнего уравнения будет

$$\eta = C_1 y^2 + C_2 y^{-1}, \tag{1.12}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Из (1.10) окончательно получим

$$\nu(y) = \frac{1}{9}\left[\left(1 + \frac{\mu_0' h}{2\mu_0}\right)\left(\frac{y}{h}\right)^2 + \left(2 - \frac{\mu_0' h}{2\mu_0}\right)\left(\frac{y}{h}\right)^{-1}\right]^2. \tag{1.13}$$

2. В случае неоднородности (1.13) уравнение (1.6) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \left[k^2(1-\xi) + \frac{2}{y^2}\right]\varphi = 0. \tag{2.1}$$

(2.1) имеет общее решение ([8])

$$\varphi = AI_{3/2}\left(k\sqrt{1-\xi}\,y\right) + BK_{3/2}\left(k\sqrt{1-\xi}\,y\right), \tag{2.2}$$

где A, B – произвольные постоянные, $I_{3/2}(z), K_{3/2}(z)$ – функции Бесселя мнимого аргумента.

Перемещение w, экспоненциально убывающее с ростом расстояния от свободной поверхности полупространства, имеет вид

$$w(x,y,t) = \frac{B}{\sqrt{\mu}} K_{3/2}\left(k\sqrt{1-\xi}\,y\right)\exp[i(kx - wt)]. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в граничное условие (1.2) и производя вычисления, получим дисперсионное уравнение для нахождения фазовой скорости v_Φ

$$D(z) \equiv zK_{1/2}(z) + aK_{3/2}(z) = 0, \tag{2.4}$$

где $z = k\sqrt{1-\xi}\,y$, $a = \dfrac{\mu_0' h}{2\mu_0} + \dfrac{3}{2}$.

Или, если воспользоваться формулой ([8])

$$K_{3/2}(z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right)K_{1/2}(z), \tag{2.5}$$

то дисперсионное уравнение (2.4) можно записать в виде

$$D(z) \equiv z^2 + az + a = 0. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) имеет положительное решение

$$z_0 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a(a-4)} - a\right] \tag{2.7}$$

при условии $H = \dfrac{\mu_0' h}{\mu_0} < -3$.

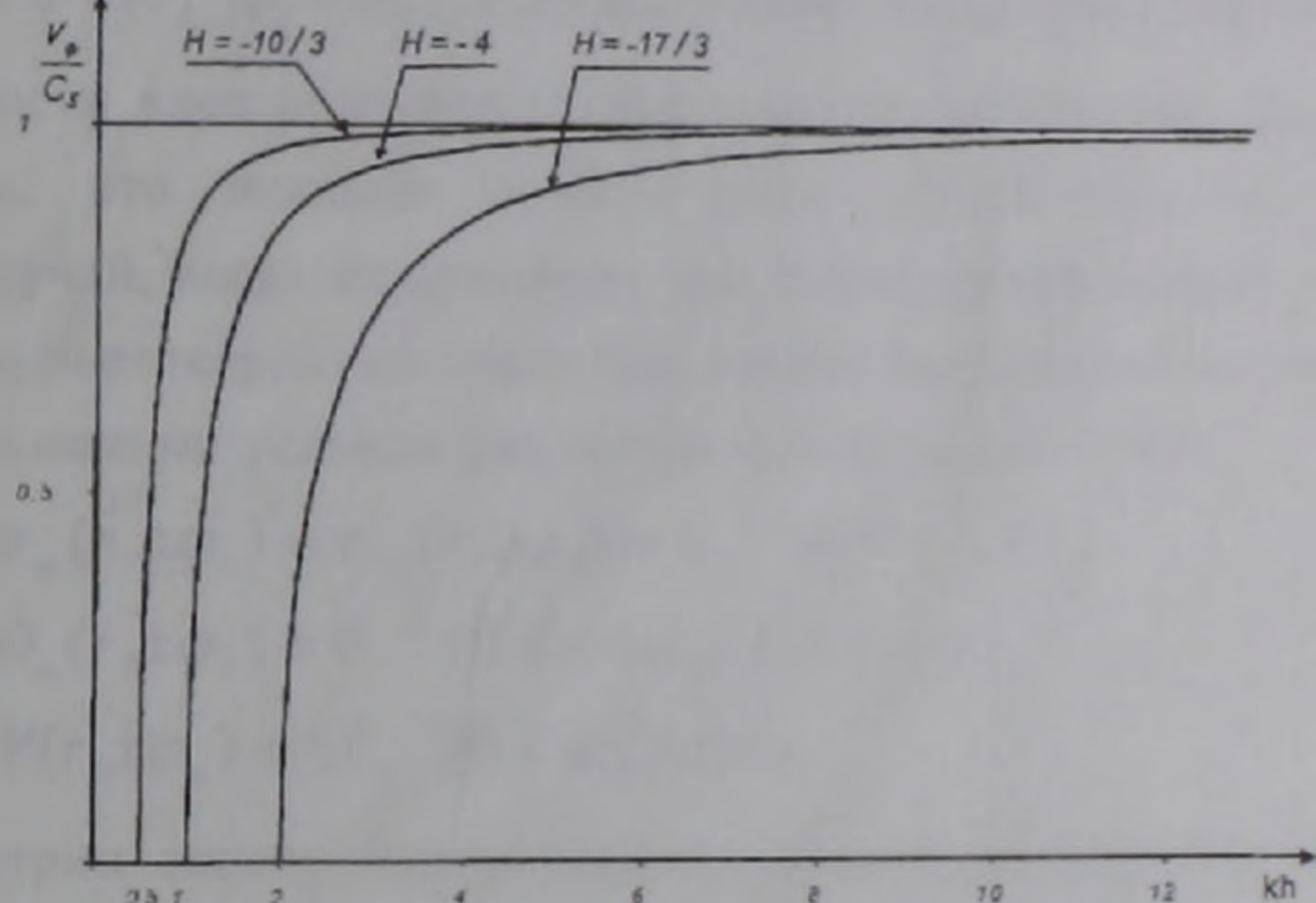
Тогда фазовая скорость сдвиговой поверхностной волны определяется формулой

$$v_\Phi = c_s\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{kh}\right)^2}\,. \tag{2.8}$$

Из (2.8) видно, что фазовая скорость СПВ определяется только характеристиками неоднородности среды при $y = h$ и ее длина ограничена снизу ($kh > z_0$).

Необходимо отметить, что, когда длина поверхностной волны велика, т.е. $kh \to \infty$, фазовая скорость СПВ стремится к скорости сдвиговой объемной волны.

На рисунке изображены дисперсионные кривые фазовой скорости в зависимости от величины kh при различных значениях H.



Дисперсионные кривые при различных значениях величины H

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Ի. Հ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Սահքի մակերևութային ալիքները որոշ ուղղաձիգ-անհամասեռ առաձգական միջավայրերում

Առաձգականության տեսության ալիքային հավասարման հակահարթ խնդրի ուղղակի վերլուծությամբ առանձնացվել է որոշ ուղղաձիգ-անհամասեռ առաձգական միջավայրեր, որոնց համար ուսումնասիրվել է սահքի մակերևութային ալիքների տարածման երևույթը: Ստացվել են այն պայմանները, որոնց դեպքում այդպիսի միջավայրերի կիսատարածության մակերևույթին կարող են առաջանալ սահքի մակերևութային ալիքներ:

Այնուհետև սահքի մակերևութային ալիքների փուլային արագությունների համար հետազոտվել են դիսպերսիոն կորերը ալիքի երկարությունից կախված:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

[1] *П.Пфейффер*. Колебания упругих тел, Л.-М., ОНТИ, 1934. [2] *И.А.Викторов*. Звуковые поверхностные волны в твердых телах, М., Наука, 1981. [3] *G.A.Maugin*. Advances in Appl.Mech., v.23, p.373-434 (1993). [4] *М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухорукова*. Теория волн, М., Наука, 1979. [5] *T.Karlsson*, J.F.Hook, Bulleetin of the Seismological Society of America, v.53, №5, p.1007-1022 (1963). [6] *С.Г.Саакян*. Механика, Межвуз.сб.науч. трудов, Ереван, вып.7, с.98-106 (1989). [7] *М.В.Белубекян, А.Р.Мухсихачоян*. Акустический журн., т.42, №2, с.179-182 (1996). [8] *Г.Н.Ватсон*. Теория *бесселевых* функций, ч.1, М., ИЛ, 1949.