

УДК 539.3

А. М. Саргсян

**Поведение связанного электроупругого поля в окрестности
 угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном
 плоском напряженном состоянии**

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 31/VII 1998)

Исследованию электроупругих полей вблизи угловых точек поверхности однородных или кусочно-однородных тел, находящихся в условиях продольного сдвига, посвящены работы (1,2) и др.

В работе (3) рассмотрена плоская задача электроупругости для однородного трансверсально-изотропного клина, на границах которого заданы упругие перемещения и значения электрического потенциала.

В данной работе исследуется поведение электроупругого поля в окрестности угловой точки тонкого однородного пьезоэлектрического клина, находящегося в обобщенном плоском напряженном состоянии. Предполагается, что вырезанный из пьезоэлектрического кристалла клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости. Механические и электрические внешние воздействия приложены к границам клина, распределены симметрично относительно срединной плоскости и незначительно изменяются по толщине. Как и в теории упругости, в условиях тонкого тела исследуются средние по толщине значения всех величин.

Начало декартовой системы координат находится в угловой точке срединной плоскости клина, ось z направлена нормально к этой плоскости (рис.1).

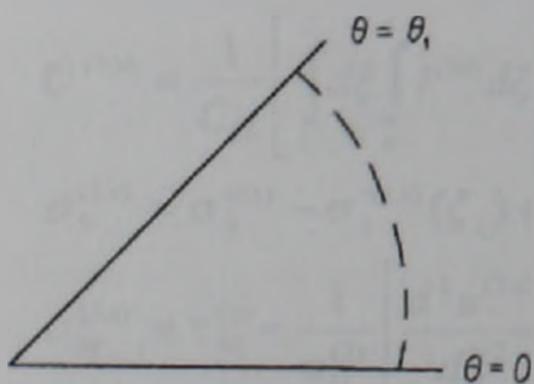


Рис. 1

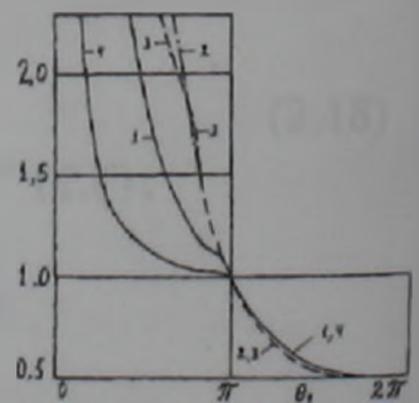


Рис. 2

При отсутствии объемных сил и электрических зарядов функции упругих напряжений $F(x, y)$ и электрической индукции $\Psi(x, y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4,5)

$$4\pi L_4 F - L_3 \Psi = 0, \quad L_3 F + L_2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где L_2, L_3, L_4 – дифференциальные операторы в частных производных

$$\begin{aligned} L_2 &= \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_3 &= -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_4 &= s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь s_{22}, \dots – коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции, η_{22}, \dots – коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях, g_{22}, \dots – пьезоэлектрические модули.

Выражения электроупругих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и компонентов вектора электрической индукции D_x, D_y через $F(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ имеют вид (4.5)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad D_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Принимая, что примыкающие к угловой точке части границы клина свободны от внешних нагрузок, электромеханические граничные условия зададим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin \theta_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos \theta_1 \Big|_{\substack{x=r \cos \theta_1 \\ y=r \sin \theta_1}} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin \theta_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos \theta_1 \Big|_{\substack{x=r \cos \theta_1 \\ y=r \sin \theta_1}} = 0, \quad \Psi \Big|_{\substack{x=r \cos \theta_1 \\ y=r \sin \theta_1}} = 0, \quad \Psi \Big|_{y=0} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Как следует из уравнений (1) и граничных условий (4), при отсутствии пьезоэффекта, т.е. при $g_{ij} = 0$, краевая задача (1)–(4) распадается на две независимые задачи: а) упругую задачу для анизотропного клина $L_4 F(x, y) = 0$ с первыми четырьмя граничными условиями из (4), б) электростатическую задачу для анизотропного клина $L_3 \Psi(x, y) = 0$ с последними двумя граничными условиями из (4). Решение первой задачи получено в работе (6), а вторая задача является частным случаем задачи, рассмотренной в работе (7).

Представляя решение уравнений (1) в виде (6)

$$F(x, y) = (x + \mu y)^{\lambda+1}, \quad \Psi(x, y) = (\lambda + 1) f(\mu) (x + \mu y)^\lambda \quad (5)$$

(λ и μ – произвольные параметры, $f(\mu)$ – неизвестная функция от μ) и подставляя в (1), получаем алгебраическое уравнение относительно μ

$$4\pi l_4(\mu)l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0 \quad (6)$$

и явный вид функции $f(\mu) = -l_3(\mu) / l_2(\mu)$, где

$$\begin{aligned} l_2(\mu) &= \eta_{22} - 2\eta_{12}\mu + \eta_{11}\mu^2, \\ l_3(\mu) &= g_{22} + (g_{12} + g_{26})\mu - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + g_{11}\mu^3, \\ l_4(\mu) &= s_{22} - 2s_{26}\mu + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{16}\mu^3 + s_{11}\mu^4. \end{aligned} \quad (7)$$

В работах (4,5) на основании энергетических соображений доказано, что уравнение (6) не имеет вещественных корней. В дальнейшем принимается, что корни уравнения (6)

$$\mu_j = \sigma_j + i\nu_j, \quad \bar{\mu}_j = \sigma_j - i\nu_j, \quad (8)$$

простые (что не является существенным ограничением (6)) и не являются одновременно корнями уравнений $l_4(\mu) = 0$, $l_3(\mu) = 0$, $l_2(\mu) = 0$.

Тогда решение (1), соответствующее каждому λ , представляется в виде суммы линейно независимых решений

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{j=1}^3 [A_j(x + \mu_j, y)^{\lambda+1} + B_j(x + \bar{\mu}_j, y)^{\lambda+1}], \\ \Psi(x, y) &= (\lambda + 1) \sum_{j=1}^3 [A_j f(\mu_j)(x + \mu_j, y)^\lambda + B_j f(\bar{\mu}_j)(x + \bar{\mu}_j, y)^\lambda], \end{aligned} \quad (9)$$

где A_j, B_j – комплексные постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям (4), для определения A_j, B_j получим

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 &= 0, \\ A_1\mu_1 + A_2\mu_2 + A_3\mu_3 + B_1\bar{\mu}_1 + B_2\bar{\mu}_2 + B_3\bar{\mu}_3 &= 0, \\ A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + B_1\bar{a}_1 + B_2\bar{a}_2 + B_3\bar{a}_3 &= 0, \\ A_1\mu_1a_1 + A_2\mu_2a_2 + A_3\mu_3a_3 + B_1\bar{\mu}_1\bar{a}_1 + B_2\bar{\mu}_2\bar{a}_2 + B_3\bar{\mu}_3\bar{a}_3 &= 0, \\ A_1f_1a_1 + A_2f_2a_2 + A_3f_3a_3 + B_1\bar{f}_1\bar{a}_1 + B_2\bar{f}_2\bar{a}_2 + B_3\bar{f}_3\bar{a}_3 &= 0, \\ A_1f_1 + A_2f_2 + A_3f_3 + B_1\bar{f}_1 + B_2\bar{f}_2 + B_3\bar{f}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_j &= (\cos\theta_j + i\sin\theta_j)^\lambda, \quad \bar{a}_j = (\cos\theta_j + i\bar{\mu}_j\sin\theta_j)^\lambda, \\ f_j &= f(\mu_j), \quad \bar{f}_j = f(\bar{\mu}_j) \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Из условия существования нетривиального решения системы (10) и после ряда преобразований и существенного упрощения громоздких выражений получаем следующее уравнение относительно λ :

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) = & A_{01} \sin \lambda(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + A_{02} \sin \lambda(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) - \\
& - A_{03} \sin \lambda(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) - A_{04} \sin \lambda(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) + \\
& + 2A_1^* \operatorname{ch}(\lambda \ln r_2 / r_3) \sin \lambda\varphi_1 + 2B_1^* \operatorname{sh}(\lambda \ln r_2 / r_3) \cos \lambda\varphi_1 - \\
& - 2A_2^* \operatorname{ch}(\lambda \ln r_1 / r_3) \sin \lambda\varphi_2 + 2B_2^* \operatorname{sh}(\lambda \ln r_1 / r_3) \cos \lambda\varphi_2 + \\
& + 2A_3^* \operatorname{ch}(\lambda \ln r_1 / r_2) \sin \lambda\varphi_3 + 2B_3^* \operatorname{sh}(\lambda \ln r_1 / r_2) \cos \lambda\varphi_3 = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где r_j и φ_j – модуль и аргумент обобщенных комплексных переменных (5),

$$z_j = (\cos \theta_j + \mu_j \sin \theta_j),$$

$A_{ok} = m_{ok} \bar{m}_{ok}$ (\bar{m}_{ok} – сопряженное по отношению к m_{ok} число),

$$m_{01} = f_1(\mu_3 - \mu_2) + f_2(\mu_1 - \mu_3) + f_3(\mu_2 - \mu_1),$$

$$m_{02} = \bar{f}_1(\mu_3 - \mu_2) + f_2(\bar{\mu}_1 - \mu_3) + \bar{f}_3(\mu_2 - \bar{\mu}_1),$$

$$m_{03} = f_1(\bar{\mu}_3 - \mu_2) + f_2(\mu_1 - \bar{\mu}_3) + f_3(\mu_2 - \mu_1),$$

$$m_{04} = f_1(\bar{\mu}_2 - \mu_3) + \bar{f}_2(\mu_3 - \mu_1) + f_3(\mu_1 - \bar{\mu}_2),$$

$$\begin{aligned}
A_1^* + iB_1^* = & [f_1(\bar{\mu}_2 - \mu_2) + f_2(\mu_1 - \bar{\mu}_2) + \bar{f}_2(\mu_2 - \mu_1)] \cdot \\
& \cdot [\bar{f}_1(\mu_1 - \bar{\mu}_3) + f_3(\bar{\mu}_3 - \bar{\mu}_1) + \bar{f}_3(\bar{\mu}_1 - \mu_3)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^* + iB_2^* = & [f_1(\bar{\mu}_1 - \mu_2) + f_2(\mu_1 - \bar{\mu}_1) + \bar{f}_1(\mu_2 - \mu_1)] \cdot \\
& \cdot [\bar{f}_2(\mu_3 - \bar{\mu}_3) + f_3(\bar{\mu}_3 - \bar{\mu}_2) + \bar{f}_3(\bar{\mu}_2 - \mu_3)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^* + iB_3^* = & [f_1(\bar{\mu}_1 - \mu_3) + f_3(\mu_1 - \bar{\mu}_1) + \bar{f}_1(\mu_3 - \mu_1)] \cdot \\
& \cdot [f_2(\bar{\mu}_3 - \bar{\mu}_2) + \bar{f}_2(\mu_2 - \bar{\mu}_3) + \bar{f}_3(\bar{\mu}_2 - \mu_2)].
\end{aligned}$$

Общее решение уравнений (1), удовлетворяющее граничным условиям (4) и конкретным условиям на замыкающей части контура угловой области, представляется в виде

$$F(x, y) = \sum_{(\lambda_i)} \sum_{j=1}^3 [A_j (x + \mu_j y)^{\lambda_i+1} + B_j (x + \bar{\mu}_j y)^{\lambda_i+1}], \tag{12}$$

$$\Psi(x, y) = (\lambda + 1) \sum_{(\lambda_i)} \sum_{j=1}^3 [A_j f_j (x + \mu_j y)^{\lambda_i+1} + B_j \bar{f}_j (x + \bar{\mu}_j y)^{\lambda_i+1}],$$

где первую сумму необходимо распространить на все корни трансцендентного уравнения (11), имеющие положительные действительные части. Необходимость отбрасывания отрицательных корней вытекает из условия конечности накопленной удельной энергии деформации в окрестности угловой точки. Переходя к полярной системе координат r, θ ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), решение (11) можно представить с разделенными переменными

$$F(x, y) = \sum_{(\lambda_i)} r^{\lambda_i+1} \sum_{j=1}^3 r_j^{\lambda_i+1} [C_j \cos(\lambda + 1)\varphi_j^* + D_j \sin(\lambda + 1)\varphi_j^*], \tag{13}$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{(\lambda_i)} r^{\lambda_i+1} \sum_{j=1}^3 r_j^{\lambda_i+1} [K_j \cos(\lambda + 1)\varphi_j^* + E_j \sin(\lambda + 1)\varphi_j^*],$$

где C_j, D_j, K_j и E_j — действительные постоянные,

$$r_{j^*} = \sqrt{(\cos \theta + \sigma_j \sin \theta)^2 + (\nu_j^2 \sin \theta)^2},$$

$$\varphi_{j^*} = \arg(\cos \theta + \mu_j \sin \theta), \quad 0 \leq \varphi_{j^*} \leq \varphi_j.$$

На основании формул (3) и разложения (13) заключаем, что поведение характеристик электроупругого поля (упругие напряжения и компоненты вектора электрической индукции) вблизи угловой точки однородного клина ($r \rightarrow 0$) определяется величиной действительной части первого корня λ_1 трансцендентного уравнения (11). Если $\operatorname{Re} \lambda_1 < 1$, характеристики поля при $r \rightarrow 0$ неограниченно возрастают. При $\operatorname{Re} \lambda_1 > 1$ эти характеристики вблизи угловой точки исчезают как $r^{\operatorname{Re} \lambda_1 - 1}$. В случае же $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1$ характеристики поля при $r \rightarrow 0$ конечны и вообще отличны от нуля.

Уравнение (11) имеет сложную структуру и содержит шестнадцать независимых параметров (угол раствора однородного клина и пятнадцать электроупругих постоянных). Поэтому исчерпывающее общее аналитическое исследование зависимости искомого корня λ_1 от параметров задачи здесь, по-видимому, невозможно.

Не накладывая ограничений на электроупругие свойства пьезоэлектрического клина, рассмотрим частные случаи $\theta_1 = \pi$ и $\theta_1 = 2\pi$.

Уравнение (11) в этих случаях принимает вид

$$\cos 2\pi\lambda - 1 = 0, \quad \text{при } \theta_1 = \pi; \quad \cos 4\pi\lambda - 1 = 0, \quad \text{при } \theta_1 = 2\pi.$$

Следовательно, когда угол раствора однородного клина $\theta_1 = \pi$, особенность характеристик электроупругого поля отсутствует, а в случае $\theta_1 = 2\pi$, когда клин превращается в плоскость с разрезом, особенность характеристик поля в вершине разреза имеет порядок 0,5.

Для численной оценки влияния связанности упругого и электрического поля рассмотрим клин, вырезанный из кристалла бифталата калия, свойства которого подробно описаны в работе (4).

Уравнение (6) в этом случае имеет простые корни

$$\mu_1 = i0,831, \quad \mu_2 = 0,685 + i0,783, \quad \mu_3 = -0,685 + i0,783,$$

$$\bar{\mu}_1 = -i0,831, \quad \bar{\mu}_2 = 0,685 - i0,783, \quad \bar{\mu}_3 = -0,685 - i0,783,$$

не являющиеся одновременно корнями $l_1(\mu) = 0$, $l_2(\mu) = 0$, $l_3(\mu) = 0$.

Далее на ПК IBM-486 определены действительные и комплексные корни трансцендентного уравнения (11) в области $0 < \operatorname{Re} \lambda \leq 1,5$, $0 < \operatorname{Im} \lambda \leq 5$. После нахождения положительных действительных корней определяется нулевая линия мнимой части $\Delta(\lambda)$ и по ходу вычислений на этой линии определяется ноль действительной части, если таковая в области поиска существует (7).

На рис.2 приведены графики изменения $\operatorname{Re} \lambda_1$ в зависимости от угла раствора пьезоэлектрического клина из бифталата калия (кривая 1) и гипотетического материала (кривая 4), отличающегося от бифталата калия только коэффициентом $g_{22} > 0$ (для бифталата калия $g_{22} = 0$). Там же, для сравнения, представлены соответствующие графики для упругого однородного анизотропного клина ⁽⁶⁾ (кривая 2) и изотропного клина ⁽⁷⁾ (кривая 3).

Из графиков следует, что в рассмотренных случаях особенность характеристик электроупругого поля в области $\pi < \theta_1 < 2\pi$ мало отличается от особенности упругих напряжений в однородных изотропных и анизотропных клиньях. В области же конечных характеристик ($0 < \theta_1 < \pi$) быстрота их убывания сильно зависит от параметров задачи. Аналогичная картина поведения термоупругих напряжений была обнаружена О.Н. Лушиком ⁽⁸⁾.

Институт механики НАН Армении

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Կապակցված էլեկտրաառաձգական դաշտի վարքը ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակում գտնվող պիեզաէլեկտրիկ սեպի անկյունային կետի շրջակայքում

էլեկտրաառաձգականության գծային տեսության դրվածքով ուսումնասիրված է առաձգական լարումների և էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչների վարքը համասեռ պիեզաէլեկտրիկ սեպի անկյունային կետի շրջակայքում: Ենթադրված է, որ պիեզաէլեկտրիկ բյուրեղից կտրված սեպը յուրաքանչյուր կետում ունի միջին հարթությանը զուգահեռ նյութական սիմետրիայի հարթություն: Սեպի եզրերը ազատ են առաձգական լարումներից և էլեկտրական լիցքերից:

Կառուցելով եզրային խնդրի լուծումը ^(1.6) աշխատանքներին համանման եղանակով, էլեկտրաառաձգական դաշտի վարքը որոշող պարամետրի համար ստացված է տրանսցենդենտ հավասարում: Այդ հավասարման անալիտիկ և թվային հետազոտությունները բացահայտել են էլեկտրական և առաձգական դաշտերի կապակցվածության զգալի ազդեցությունը առաձգական լարումների և ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչների վրա:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

- ¹ А.М. Саргсян, А.С. Хачикян, Изв. НАН и ГИУ Армении. Техн науки, т.48, №3, с.151-156 (1995) ² М.В. Белубекян, Л.В. Галпчян, МТТ, №3, с.102-108, 1994. ³ С.А. Мелкумян, в сб. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем, Ереван, с.226-229, 1997. ⁴ И.А. Вековищева, ПМ, т.11, №2, с.85-89 (1975). ⁵ А.С. Космодамицкий, В.М. Ложкин, ПМ, т.11, №5, с.45-53 (1975). ⁶ Р.К. Алексанян, ДАН АрмССР, т.61, №4, с.219-224 (1975). ⁷ К.С. Чобанян, Напряжения в составных упругих телах, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1987. ⁸ О.Н. Лушик, Изв. Сев. Кавказ. науч. центра высшей школы. Естественные науки, №4, с.29-32, 1978.