ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

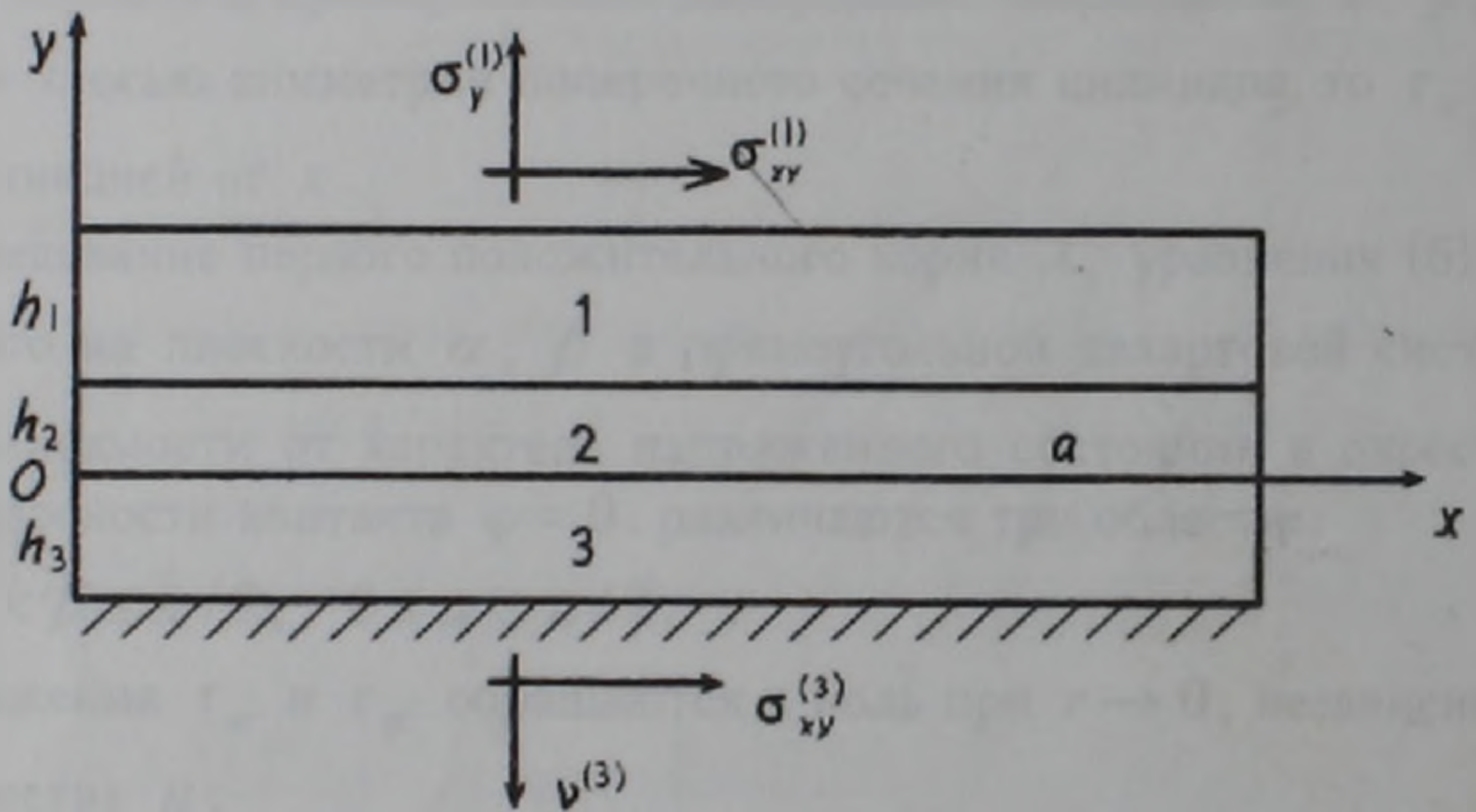
УДК 539.3

А. Б. Товмасян

Решение внутренней термоупругой задачи трехслойной полосы, когда контакт между слоями неполный

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 31/VII 1998)

1. Поставим задачу: найти асимптотическое решение смешанной термоупругой краевой задачи для трехслойной анизотропной полосы в области $\Omega = \{(x,y)\colon x \in [0,a],$ $-h_3 \le y \le h_1 + h_2,\ h_1 + h_2 + h_3 << a\}$ при неполном контакте слоев (рисунок).



Считается, что в плоскости полосы анизотропия самая общая, на полосу действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x^{(i)}(x,y)$, $F_y^{(i)}(x,y)$, $i = 1,2,3$ и температуры. Изменение температурного поля $\theta^{(i)} = T^{(i)} - T_0^i$ считается известной функцией. Величины, относящиеся к верхнему слою, отмечаются сверху индексом 1, среднему – индексом 2, нижнему – индексом 3. На продольной кромке первого слоя заданы компоненты тензора напряжений, а на нижней продольной кромке третьего слоя – нормальные компоненты вектора перемещения и касательное напряжение. Контакт между всеми слоями неполный.

Граничные и контактные условия записываются в виде:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{+}(\xi),\ \sigma_y^{(1)} = \varepsilon^{-1}\sigma_y^{+}(\xi) \quad \text{при } y = h_1 + h_2, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xy}^{(3)} = \sigma_{xy}^{-}(\xi),\ v^{(3)} = \varepsilon^{-1} v^{-}(\xi) \qquad \text{при } y = -h_3, \tag{1.2}$$

$$v^{(1)} = v^{(2)},\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = \tau_{01}(\xi) \quad \text{при } y = h_2, \tag{1.3}$$

$$v^{(2)} = v^{(3)},\ \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)},\ \sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(3)} = \tau_{02}(\xi) \quad \text{при } y = 0, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon = h/a,\ \xi = x/a,\ h = \max(h_1, h_2, h_3).$$

Заданы также условия при $x = 0, a$, которые пока считаются произвольными, но такими, чтобы обеспечивалось равновесие полосы как жесткого тела. Задав виды функций $\tau_{0i}(\xi)$, будем иметь различные модели межслоевого взаимодействия. Например, при $\tau_{0i}(\xi) = 0$ имеем свободное в тангенциальном направлении скольжение, при $\tau_{0i}(\xi) = f\sigma_y^{(i)}(y=0)$ – сухое трение и т.д.

Решение задачи сводится к решению следующей системы уравнений и соотношений термоупругости:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} + F_x^{(i)} = 0,\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y^{(i)}}{\partial y} + F_y^{(i)} = 0,\\
\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} = a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i)},\\
\frac{\partial v^{(i)}}{\partial y} = a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i)},\\
\frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} = a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i)},
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $a_{kl}^{(i)}$ – упругие коэффициенты податливости, $\alpha_{kl}^{(i)}$ – коэффициенты теплового расширения каждого слоя.

2. Чтобы решить поставленную задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости (1.5) перейдем к безразмерным переменным и перемещениям по формулам $\xi = x/a,\ \zeta = y/h,\ U^{(i)} = u^{(i)}/a,\ V^{(i)} = v^{(i)}/a,\ h = \max(h_1, h_2, h_3)$.

Решение задачи сводится к решению следующей сингулярно возмущенной малым параметром $\varepsilon = h/a$ системы:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_x^{(i)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial \zeta} + aF_x^{(i)} = 0,\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_y^{(i)}}{\partial \zeta} + aF_y^{(i)} = 0,\\
\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i)},\\
\varepsilon^{-1}\frac{\partial V^{(i)}}{\partial \zeta} = a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i)},\\
\varepsilon^{-1}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(i)}}{\partial \xi} = a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i)}.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Решение системы (2.1) состоит из решения внутренней задачи и пограничных слоев. Решение внутренней задачи ищем в виде [1,2]

$$Q^{(i)} = \varepsilon^{q_i+s} Q^{(i,s)}(\xi,\zeta), \quad s=\overline{0,S}, \tag{2.2}$$

где $Q^{(i)}$ – любое из напряжений и перемещений, q_i – целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(i,s)}$. В (2.2) и далее предполагается, что по повторяющемуся (немому) индексу s всегда происходит суммирование от 0 до S, S – число приближений. Чтобы получить разрешимую систему относительно $Q^{(i,s)}$, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} &q_i = -1 \text{ для } \quad \sigma_x^{(i)},\ \sigma_y^{(i)},\ U^{(i)},\ V^{(i)}, \\ &q_i = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{xy}^{(i)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Влияния массовых сил и температурного поля будут соизмеримыми с влиянием поверхностных сил, т.е. соответствующие величины будут фигурировать в уравнениях исходного приближения, если они будут иметь асимптотические порядки:

$$\begin{gathered} F_x^{(i)} = \varepsilon^{-1+s} a^{-1} F_x^{(i,s)}(\xi,\zeta), \quad F_y^{(i)} = \varepsilon^{-2+s} a^{-1} F_y^{(i,s)}(\xi,\zeta) \\ \theta^{(i)} = \varepsilon^{-1+s} \theta^{(i,s)}(\xi,\zeta), \end{gathered} \tag{2.4}$$

Подставив (2.2) в (2.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в правых и левых частях каждого уравнения, с учетом (2.3), (2.4) получим непротиворечивую систему относительно $Q^{(i,s)}$; решив эту систему, получим

$$\begin{aligned} &U^{(i,s)} = u^{(i,s)}(\xi) + u^{*(i,s)}(\xi,\zeta), \quad V^{(i,s)} = v^{(i,s)}(\xi) + v^{*(i,s)}(\xi,\zeta), \\ &\sigma_y^{(i,s)} = \sigma_{y0}^{(i,s)}(\xi) + \sigma_y^{*(i,s)}(\xi,\zeta), \quad \sigma_x^{(i,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(i)}}\left[\frac{du^{(i,s)}}{d\xi} - a_{12}^{(i)}\sigma_{y0}^{(i,s)}(\xi)\right] + \sigma_x^{*(i,s)}(\xi,\zeta), \\ &\sigma_{xy}^{(i,s)} = \sigma_{xy0}^{(i,s)} - \frac{1}{a_{11}^{(i)}}\left[\frac{d^2u^{(i,s)}}{d\xi^2} - a_{12}^{(i)}\frac{d\sigma_{y0}^{(i,s)}}{d\xi}\right]\zeta + \sigma_{xy}^{*(i,s)}(\xi,\zeta), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где величины со звездочками – известные функции от ξ, ζ для каждого приближения s, если определены величины предыдущих приближений. Они определяются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} &v^{*(i,s)} = \int_0^{\zeta}\left[a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-2)} + \alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}\right]d\zeta, \\ &u^{*(i,s)} = \int_0^{\zeta}\left[a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-2)} + \alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i,s-1)} - \frac{\partial V^{(i,s-1)}}{\partial\xi}\right]d\zeta, \\ &\sigma_x^{*(i,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(i)}}\left(\frac{\partial u^{*(i,s)}}{\partial\xi} - a_{12}^{(i)}\sigma_y^{*(i,s)} - a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} - \alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i,s)}\right), \\ &\sigma_y^{*(i,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(i,s-2)}}{\partial\xi} + F_y^{(i,s)}\right)d\zeta, \quad \sigma_{xy}^{*(i,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(i,s)}}{\partial\xi} + F_x^{(i,s)}\right)d\zeta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В (2.5) неизвестными являются функции $\sigma_{xy0}^{(i,s)}, \sigma_{y0}^{(i,s)}$, $u^{(i,s)}, v^{(i,s)}$, которые определяются из условий (1.1)–(1.4). Удовлетворив условиям (1.1)–(1.4), получим:

для величин первого слоя

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1),$$
$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy}^{+(s)} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\left[\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2} - a_{12}^{(1)}\frac{d\sigma_{y0}^{(1,s)}}{d\xi}\right]\zeta_1 - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1), \tag{2.7}$$
$$v^{(1,s)} = v^{-(s)} / a - v^{*(3,s)}(\zeta=-\zeta_3) + v^{*(2,s)}(\zeta=\zeta_2) - v^{*(1,s)}(\zeta=\zeta_1),$$

где $u^{(1,s)}$ определяется из уравнения

$$\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2} = \frac{N^{(s)}}{C_{11}}, \tag{2.8}$$

а

$$C_{11} = \frac{1}{a_{11}^{(1)}}(\zeta_2 - \zeta_1),$$

$$N^{(s)} = \sigma_{xy}^{+(s)} - \tau_{01}^{(s)} - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(\zeta_1 - \zeta_2)\frac{d\sigma_{y0}^{(1,s)}}{d\xi} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1) + \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_2), \tag{2.9}$$

т.е.

$$C_{11}u^{(1,s)} = \int_0^\xi d\xi \int_0^\xi N^{(s)} d\xi + C_1^{(s)}\xi + C_2^{(s)};$$

для величин второго слоя

$$\sigma_{y0}^{(2,s)}(\xi) = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1) + \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_2) - \sigma_y^{*(2,s)}(\zeta_2),$$
$$\sigma_{xy0}^{(2,s)}(\xi) = \tau_{02}^{(s)}, \quad v^{(2,s)}(\xi) = v^{-(s)} / a - v^{*(3,s)}(-\zeta_3). \tag{2.10}$$

Для определения же $u^{(2,s)}$ получается уравнение

$$C_{22}\frac{d^2u^{(2,s)}}{d\xi^2} = R^{(s)},$$
$$C_{22} = \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}, \quad R^{(s)} = \tau_{02}^{(s)} - \tau_{01}^{(s)} + \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\zeta_2\frac{d\sigma_{y0}^{(2,s)}}{d\xi} + \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_2), \tag{2.11}$$

следовательно

$$C_{22}u^{(2,s)} = \int_0^\xi d\xi \int_0^\xi R^{(s)} d\xi + C_3^{(s)}\xi + C_4^{(s)}; \tag{2.12}$$

для величин третьего слоя

$$\sigma_{y0}^{(2,s)}(\xi) = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1) + \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_2) - \sigma_y^{*(2,s)}(\zeta_2),$$
$$\sigma_{xy0}^{(3,s)}(\xi) = \tau_{02}^{(s)}, \quad v^{(3,s)}(\xi) = v^{-(s)} / a - v^{*(3,s)}(-\zeta_3), \; \zeta_i = h_i / h. \tag{2.13}$$

Для определения $u^{(3,s)}$ получается уравнение

$$C_{33}\frac{d^2u^{(3,s)}}{d\xi^2}=P^{(s)},$$

а

$$C_{33}=\frac{\zeta_3}{a_{11}^{(3)}},\quad P^{(s)}=\sigma_{xy}^{(3,s)}-\tau_{02}^{(s)}-\sigma_{xy}^{*(3,s)}(\xi,-\zeta_3)+\frac{a_{12}^{(3)}}{a_{11}^{(3)}}\zeta_3\frac{d\sigma_{y0}^{(3,s)}}{d\xi},\tag{2.14}$$

откуда следует

$$u^{(3,s)}=\frac{1}{C_{33}}\left[\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi P^{(s)}d\xi\right]+C_5^{(s)}\xi+C_6^{(s)}.\tag{2.15}$$

Подставив значения величин (2.7), (2.10), (2.13) в (2.5), получим следующие формулы для непосредственного вычисления величин $\sigma_{xy}^{(i,s)}$, $\sigma_y^{(i,s)}$, $U^{(i,s)}, V^{(i,s)}$:

величины первого слоя

$$\begin{aligned}
&V^{(1,s)}=v^{-(s)}/a-v^{*(3,s)}(-\zeta_3)+v^{*(2,s)}(\zeta_2)-v^{*(1,s)}(\zeta_2)+v^{*(1,s)}(\xi,\zeta),\\
&U^{(1,s)}=\frac{1}{C_{11}}\left[\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi N^{(s)}d\xi+C_1^{(s)}\xi+C_2^{(s)}\right]+u^{*(1,s)}(\xi,\zeta),\\
&\sigma_y^{(1,s)}=\sigma_y^{+(s)}-\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)+\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta),\\
&\sigma_{xy}^{(1,s)}=\sigma_{xy}^{+(s)}+\frac{1}{a_{11}^{(1)}}\left[\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2}-a_{12}^{(1)}\frac{d\sigma_{y0}^{(1,s)}}{d\xi}\right](\zeta_1-\zeta)-\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)+\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta);
\end{aligned}\tag{2.16}$$

величины второго слоя

$$\begin{aligned}
&V^{(2,s)}=v^{-(s)}/a-v^{*(3,s)}(-\zeta_3)+v^{*(2,s)}(\xi,\zeta),\\
&U^{(2,s)}=\frac{1}{C_{22}}\left[\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi R^{(s)}d\xi+C_3^{(s)}\xi+C_4^{(s)}\right]+u^{*(2,s)}(\xi,\zeta),\\
&\sigma_y^{(2,s)}=\sigma_y^{+(s)}-\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1)+\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_2)+\sigma_y^{*(2,s)}(\xi,\zeta)-\sigma_y^{*(2,s)}(\zeta_2),\\
&\sigma_{xy}^{(2,s)}=\tau_{02}^{(s)}-\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\left[\frac{d^2u^{(2,s)}}{d\xi^2}-a_{12}^{(2)}\frac{d\sigma_{y0}^{(2,s)}}{d\xi}\right]\zeta+\sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta);
\end{aligned}\tag{2.17}$$

величины третьего слоя

$$\begin{aligned}
&V^{(3,s)}=v^{-(s)}/a-v^{*(3,s)}(-\zeta_3)+v^{*(3,s)}(\xi,\zeta),\\
&U^{(3,s)}=\frac{1}{C_{33}}\left[\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi P^{(s)}d\xi\right]+C_5^{(s)}\xi+C_6^{(s)}+u^{*(3,s)}(\xi,\zeta),\\
&\sigma_y^{(3,s)}=\sigma_y^{+(s)}-\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1)+\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_2)-\sigma_y^{*(2,s)}(\zeta_2)+\sigma_y^{*(3,s)}(\xi,\zeta),\\
&\sigma_{xy}^{(3,s)}=\tau_{02}^{(s)}-\frac{1}{a_{11}^{(3)}}\left[\frac{d^2u^{(3,s)}}{d\xi^2}-a_{12}^{(3)}\frac{d\sigma_{y0}^{(3,s)}}{d\xi}\right]\zeta+\sigma_{xy}^{*(3,s)}(\xi,\zeta);
\end{aligned}\tag{2.18}$$

Входящие в эти формулы постоянные $C_2^{(s)}$, $C_4^{(s)}$, $C_6^{(s)}$ характеризуют жесткое смещение, а $C_1^{(s)}$, $C_3^{(s)}$, $C_5^{(s)}$ определяются из условий на торцах $x=0,\ a,$ которым решением внутренней задачи можно удовлетворить лишь интегрально. Для удовлетворения условиям в каждой точке торца необходимо привлечь погранслой ([3]).

Таким образом, формулами (2.2), (2.3), (2.16)–(2.18) можно с наперед заданной асимптотической точностью определить решение внутренней задачи.

Арцахский государственный университет
Нагорно-Карабахской Республики

Ա. Բ. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

Եռաշերտի ներքին ջերմաառաձգական խնդրի լուծումը, երբ շերտերի միջև կոնտակտը ոչ լրիվ է.

Կառուցված է ջերմաառաձգական խառը եզրային ներքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը անիզոտրոպ եռաշերտի համար, երբ շերտերի միջև կոնտակտը ոչ լրիվ է: Ուսումնասիրված է այն դեպքը, երբ եռաշերտի առաջին շերտի երկայնական նիստի վրա տրված են լարման տենզորի բաղադրիչները, իսկ երրորդ շերտի ստորին նիստի վրա՝ նորմալ տեղափոխությունը և շոշափող լարումը: Շերտերից յուրաքանչյուրն իր հարթության մեջ օժտված է ընդհանուր անիզոտրոպիայի հատկությամբ:

Ցույց է տրված, որ ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում բնութագրիչ հավասարումների թիվը համընկնում է շերտերի ազատության աստիճանների թվի հետ, եթե նրանք դիտվեն որպես բացարձակ կոշտ մարմիններ:

Հաստատված են անհայտ մեծությունների ասիմպտոտիկ կարգերը, երբ առկա են ծավալային ուժերը և փոփոխական ջերմային դաշտը:

Արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր լարման տենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար:

Օգտագործելով նշված բանաձևերը բավարարված են բոլոր եզրային և կոնտակտի պայմանները:

Արտածված են անալիտիկ բանաձևեր յուրաքանչյուր շերտի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

[1] *А.Л.Гольденвейзер*, ПММ, т.26, вып.4 (1962). [2] *Л.А.Агаловян*, Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек, М., Наука, 1997. [3] *Л.А.Агаловян*, Межвуз сб.: Механика, Изд. ЕГУ, вып.3 (1984).