ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3.01

П. В. Галпчян

Граничные задачи антиплоской деформации для цилиндра, составленного из различных материалов

(Представлено академиком НАН Армении М.А.Задояном 21/VII 1998)

Обобщением метода Фурье решаются граничные задачи для уравнения Лапласа в двумерной области в виде кругового сектора. Рассматриваемая область состоит из двух круговых секторов, соответствующих однородным изотропным линейно-упругим материалам с различными модулями сдвига.

Исследован весь спектр собственных значений рассмотренной граничной задачи и показано, что различаются три вида задач, представляющих, каждая в отдельности, особый интерес в отношении подхода к построению соответствующих им решений.

В цилиндрической системе координат r, φ, z составные части цилиндра ограничены координатными поверхностями: $\varphi=-\beta$, $\varphi=0$, $\varphi=\alpha$, и $r=a$. Причем $0\leq\alpha$, $\beta\leq 2\pi$, $0<\alpha+\beta\leq 2\pi$, $a>0$. Ось z – образующая цилиндра.

Антиплоская деформация цилиндра вызывается продольным сдвигом по направлению оси z. При этом модуль вектора смещения $u=u_z(r,\varphi)$ (u_z – проекция вектора смещения на ось z) не зависит от координаты z.

Если при отсутствии массовых сил ввести функцию напряжений $F_i(r,\varphi)$ $(i=1,2)$, то при малой деформации единственное условие совместности деформаций выразится через нее уравнением Лапласа

$$\Delta F_i(r,\varphi)=0. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 соответствует области $\varphi\in[0;\alpha]$, а индекс 2 – $\varphi\in[-\beta;0]$.

Боковые грани цилиндра ($\varphi=-\beta, \varphi=\alpha$) свободны от воздействия внешних нагрузок. Эти условия равносильны условиям

$$F_1(r,\alpha)=0, \quad F_2(r,-\beta)=0. \tag{2}$$

Условия непрерывности перемещения u_z^i и напряжения $\tau_{\varphi z}^{(i)}$ на линии раздела смежных областей $\varphi = 0$ выражаются через функцию F_i следующими соотношениями:

$$\frac{\partial F_1(r,0)}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial F_2(r,0)}{\partial \varphi}, \quad \mu = \frac{G_1}{G_2}, \tag{3}$$

$$F_1(r,0) = F_2(r,0), \tag{4}$$

где G_i $(i = 1,2)$ – модуль сдвига, $\mu \in (0;\infty)$.

Методом разделения переменных $F_i = R_i(r)\theta_i(\varphi)$ для уравнения (1) находим решение

$$F_i(r,\varphi) = r^\lambda (A_i \cos\lambda\varphi + B_i \sin\lambda\varphi). \tag{5}$$

где λ – некоторый параметр, A_i, B_i – постоянные, подлежащие определению.

Удовлетворяя условиям (2)-(4), для определения постоянных A_i и B_i получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, ненулевое решение которой возможно лишь в следующих четырех случаях:

а) $\mu \sin\lambda\alpha \cos\lambda\beta + \cos\lambda\alpha \sin\lambda\beta = 0,$ (6)

причем $\cos\lambda\alpha \neq 0;$

б) $\cos\lambda\alpha = 0;$ (7)

в) $\mu \sin\lambda\alpha \cos\lambda\beta + \cos\lambda\alpha \sin\lambda\beta = 0,$ (8)

причем $\sin\lambda\alpha \neq 0;$

г) $\sin\lambda\alpha = 0.$ (9)

Уравнение (6) впервые было получено в ([1]). Оно имеет только действительные корни, следовательно, в представлении (5) $\lambda > 0$.

В случае (7), рассматривая отношение

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_{kn}^{*} = \frac{2k-1}{2n-1} \quad (k,n = 1,2,\ldots),$$

при помощи вышеуказанной системы алгебраических уравнений можно установить, что если отношение $\alpha / \beta = 1$, т.е. является диагональным элементом матрицы $\left\| a_{kn}^{*} \right\|$, то собственными значениями будут

$$\lambda_l = \frac{\pi}{2\alpha}(2l-1) \quad (l = 1,2,\ldots).$$

Если отношение α / β является элементом k-ой строки матрицы $\left\| a_{kn}^{*} \right\|$, то собственными значениями будут

$$\lambda_l = \frac{\pi}{2\alpha}(2k-1)(2l-1) \quad (l = 1,2,\ldots).$$

В случае (9), рассматривая отношение

$$\frac{\alpha}{\beta} = b_{kn}^{*} = \frac{k}{n} \quad (k,n = 1,2,\ldots),$$

при помощи указанной системы алгебраических уравнений можно установить, что если $\alpha / \beta = 1$, т.е. является диагональным элементом матрицы $\left\| b^{*}_{knl} \right\|$, то собственными значениями будут

$$\lambda_j = \frac{\pi}{\alpha} j \quad (j = 1,2,\ldots).$$

Если же отношение α / β является элементом k-ой строки матрицы $\left\| b^{*}_{knl} \right\|$, то при этом собственные значения определяются формулой

$$\lambda_j = \frac{\pi}{\alpha} kj \quad (j = 1,2,\ldots).$$

Как видим, случаи (7) и (9) относятся к таким значениям параметров α и β, когда их отношение является рациональным числом. Заметим также, что множество элементов $\left\| a^{*}_{knl} \right\|$ является подмножеством множества $\left\| b^{*}_{knl} \right\|$.

Если отношение α / β не является элементом таблицы $\left\| b^{*}_{knl} \right\|$, т.е. является иррациональным числом, то остается рассматривать только случаи (6) и (8).

В случае $\alpha = \beta$ достаточно рассматривать только случаи (6) и (7), так как случаи (8) и (9) дают те же самые собственные числа.

Из проведенного анализа заключаем, что особый интерес представляют случаи:

1) $\alpha = \beta$;

2) α / β – рациональное число;

3) α / β – иррациональное число.

Построим решение в случае, когда отношение α / β иррациональное число Собственные значения λ_k $(k = 1,2,\ldots)$, пронумерованные по порядку возрастания, определяются из уравнения (6).

В этом случае из системы алгебраических уравнений получим

$$A_2^{(k)} = A_1^{(k)} = -\mu B_2^{(k)} tg \lambda_k \alpha, \quad B_1^{(k)} = \mu B_2^{(k)}.$$

Собственная функция $\theta_k^{(i)}(\lambda_k, \varphi)$, соответствующая λ_k, имеет вид

$$\theta_k^{(1)}(\lambda_k, \varphi) = \frac{\mu B_2^{(k)}}{\cos \lambda_k \alpha} \sin \lambda_k (\varphi - \alpha),$$

$$\theta_k^{(2)}(\lambda_k, \varphi) = \frac{B_2^{(k)}}{\cos \lambda_k \alpha} (\sin \lambda_k \varphi \cos \lambda_k \alpha - \mu \cos \lambda_k \varphi \sin \lambda_k \alpha).$$

Общее решение задачи (1)-(4) будет

$$F_1(r, \varphi) = \mu \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{*} r^{\lambda_k} \sin \lambda_k (\varphi - \alpha),$$

$$F_2(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{*} r^{\lambda_k} (\sin \lambda_k \varphi \cos \lambda_k \alpha - \mu \cos \lambda_k \varphi \sin \lambda_k \alpha), \qquad (10)$$

где $A_k^* = B_2^{(k)} / \cos\lambda_k\alpha$. Оно совпадает с решением, полученным в ([2]), если в последнем перейти к изотропным материалам. При $\mu = 1$ из (10) получается решение для однородного цилиндра.

Если на поверхности цилиндра $r = a$ зададим граничные условия $\tau_{z\varphi}^{(j)}(a,\varphi) = \tau f_j(\varphi)$, то согласно (10) будем иметь разложения

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\lambda_k(\varphi - \alpha) = \frac{\tau}{\mu} f_1(\varphi), \tag{11а}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k (\cos\lambda_k\varphi\cos\lambda_k\alpha + \mu\sin\lambda_k\varphi\sin\lambda_k\alpha) = \tau f_2(\varphi), \tag{11б}$$

где $A_k = A_k^*\lambda_k a^{\lambda_k - 1}$, $\tau = (G_1 + G_2)/2$, $f_i(\varphi)$ – произвольные, но такие функции, что внешние касательные усилия на цилиндрической поверхности $r = a$ составляют уравновешенную систему сил.

Умножим равенство (11а) на $G_1\cos\lambda_n(\varphi-\alpha)$, а равенство (11б) на $G_2(\cos\lambda_n\varphi\cos\lambda_n\alpha + \mu\sin\lambda_n\varphi\sin\lambda_n\alpha)$ $(n = 1,2,\ldots)$ и проинтегрируем первое из них почленно в промежутке $[0;\alpha]$, а второе – $[-\beta;0]$. Складывая почленно полученные равенства, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_k

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k a_{kn} = g_n \qquad (n = 1,2,\ldots). \tag{12}$$

При помощи (6) и (8) можно показать, что когда $k \neq n$, $a_{kn} = 0$. Коэффициент a_{nn} и свободный член g_n выражаются формулами

$$a_{nn} = G_2\left[\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\lambda_n\beta}{4\lambda_n}\right)\cos^2\lambda_n\alpha - \frac{\mu}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n\alpha\sin^2\lambda_n\beta + \right.$$

$$\left. +\mu^2\sin^2\lambda_n\alpha\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\lambda_n\beta}{4\lambda_n}\right)\right] + G_1\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\lambda_n\alpha}{4\lambda_n}\right),$$

$$g_n = \tau G_2\left[\int_{-\beta}^{0} f_2(\varphi)(\cos\lambda_n\varphi\cos\lambda_n\alpha + \mu\sin\lambda_n\varphi\sin\lambda_n\alpha)d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\alpha} f_1(\varphi)\cos\lambda_n(\varphi - \alpha)d\varphi\right].$$

Таким образом, в силу того, что производные собственных функций $\theta_k^{(j)}(\lambda_k;\varphi)$, соответствующие различным собственным числам, ортогональны в промежутке $[-\beta;\alpha]$ с весом G_j, уравнения (12) упрощаются. В итоге получаем коэффициенты Фурье разложений (11)

$$A_k = g_k / a_{kk}. \tag{13}$$

Согласно (10) и (13) для компонента напряжения $\tau^{(i)}_{\varphi z}$ будем иметь формулы:

$$\tau^{(1)}_{\varphi z}(r,\varphi)=\mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k^*}{a_k}\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k-1}\sin\lambda_k(\alpha-\varphi),$$

$$\tau^{(2)}_{\varphi z}(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k^*}{a_k}\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k-1}(\mu\cos\lambda_k\varphi\sin\lambda_k\alpha-\sin\lambda_k\varphi\cos\lambda_k\alpha),$$

где $g_k^*=g_k/G_2$, $a_k=a_{kk}/G_2$.

Аналогичные формулы получаются и для компонента напряжения $\tau^{(i)}_{zr}$.

Условия равновесия системы внешних сил имеют вид

$$\int_{-\beta}^{0}f_2(\varphi)d\varphi+\int_{0}^{\alpha}f_1(\varphi)d\varphi=0,$$

$$\int_{-\beta}^{0}f_2(\varphi)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\varphi\right)d\varphi+\int_{0}^{\alpha}f_1(\varphi)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\varphi\right)d\varphi=0.$$

Причем для простоты здесь принято, что напряжения $\tau_{zr}(a,\varphi)$ симметричны относительно оси симметрии поперечного сечения цилиндра. Это значит, что если перейти к прямоугольным декартовым координатам x, y, z, совместив ось y с осью симметрии поперечного сечения цилиндра, то $\tau_{zr}(a,\varphi)$ будет четной функцией от x.

Исследование первого положительного корня λ_1 уравнения (6) из ([1]) показывает, что на плоскости α, β в прямоугольной декартовой системе координат, в зависимости от характера напряженного состояния в окрестности края ($r=0$) плоскости контакта $\varphi=0$, различаются три области:

а) $0<\beta\le\pi/2,\quad 0\le\alpha\le\pi/2,$

где напряжения τ_{zr} и $\tau_{\varphi z}$ обращаются в ноль при $r\to 0$, независимо от значения параметра μ;

б) $0<\beta\le\pi,\quad \pi\le\alpha\le 2\pi,\quad \alpha+\beta\le 2\pi;$

$\pi/2\le\beta\le\pi,\quad \pi/2\le\alpha\le\pi;$

$\pi\le\beta\le 2\pi,\quad 0\le\alpha\le\pi,\quad \alpha+\beta\le 2\pi,$

где напряжения τ_{zr} и $\tau_{\varphi z}$ независимо от значения параметра μ обладают интегрируемой особенностью при $r\to\infty$;

в) $0<\beta<\pi/2,\quad \pi/2<\alpha<\pi;$
$\pi/2<\beta<\pi,\quad 0\le\alpha<\pi/2,$

где возникновение нулевого напряженного состояния или особенности напряжений в полюсе $r=0$ зависит от значения параметра μ. Подробный анализ можно найти в ([1]).

Институт механики НАН Армении

Պ. Վ. ԳԱԼՊՃՅԱՆ

Տարբեր նյութերից կազմված գլանի հակահարթ դեֆորմացիայի եզրային խնդիրներ

Ֆուրյեի մեթոդի ընդհանրացմամբ Լապլասի հավասարման համար շրջանային սեկտորի տեսքով երկչափ տիրույթում լուծվել են եզրային խնդիրներ: Դիտվող տիրույթը կազմված է երկու շրջանային սեկտորներից, որոնք համապատասխանում են սահքի տարբեր մոդուլներ ունեցող՝ համասեռ իզոտրոպ գծային առաձգականությամբ օժտված նյութերի:

Հետազոտվել է դիտվող եզրային խնդրի սեփական արժեքների ամբողջ սպեկտրը և ցույց է տրվել, որ տարբերվում են խնդիրների երեք տարատեսակներ: Դրանցից յուրաքանչյուրը՝ համապատասխան լուծումների կառուցման առանձնահատկության տեսանկյունից, ներկայացնում է առանձին հետաքրքրություն:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

[1] *К.С.Чобанян.* Напряжения в составных упругих телах, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1987. [2] *Р.К.Алексанян, С.А.Мелик-Саркисян,* Изв. АН АрмССР. Механика, т.31, №1, с.40-47 (1978).