

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Д. Я. Бардзокас, А. И. Зобнин, **Б. А. Кудрявцев**

Об обобщенном интегральном преобразовании
Конторовича-Лебедева и его применении при решении
граничных задач теории упругости и теплопроводности

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 21/IV 1998)

Продолжая исследование об обобщенном интегральном преобразовании Конторовича-Лебедева (¹), рассмотрим еще один его вариант, позволяющий получить разложение функции $f(r)$ по собственным функциям краевой задачи для уравнения ((¹), ур(1)) на промежутке $a < r < \infty$ ($a > 0$). В этом случае его решение будем искать при условиях

$$u(a) = 0, \quad u(\infty) = 0. \quad (1)$$

Следуя изложенной выше схеме, найдем решение неоднородного уравнения (5) из (¹) по формуле

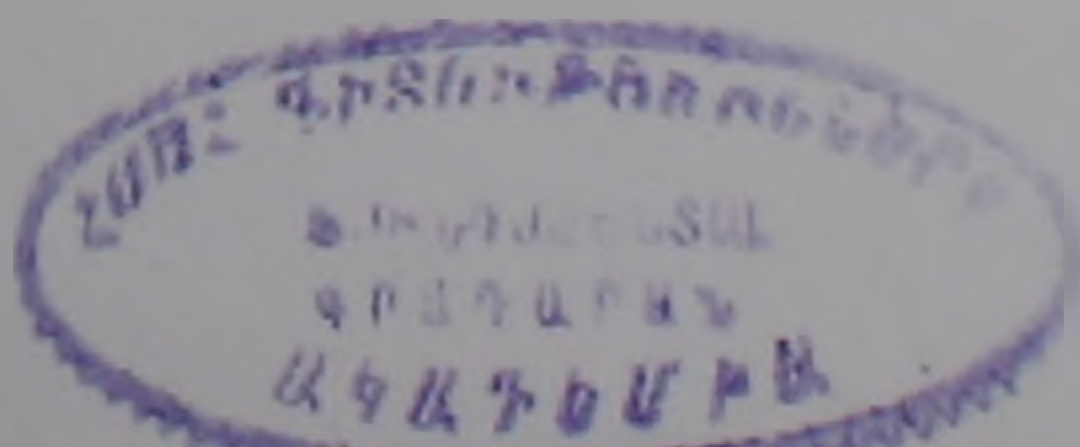
$$\bar{u}(r, p) = -\frac{1}{\omega(p)} \int_a^\infty G(r, \xi, p) B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) f(\xi) \frac{\partial \xi}{\xi}, \quad (2)$$

где $G(r, \xi, p)$, $\omega(p)$ – функции, определяемые по-прежнему формулами (7), (8) из (¹), а линейно-независимые решения $\bar{u}_1(r, p)$, $\bar{u}_2(r, p)$, входящие в выражения для $G(r, \xi, p)$ и $\omega(p) = rA(\rho)W(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, определим в форме ряда (9) из (¹), выбирая при этом два линейно-независимых решения (14) из (¹) в виде

$$u_{01} = I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a) - I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r), \\ u_{02} = K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r).$$

Из (9) (из (¹)) получим в таком случае

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(r, p) = & \left[I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a) - I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) \right] + \\ & + \varepsilon N_1(\rho) \left[\gamma (I_{\chi\sqrt{p+1}}(\gamma r) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a) + K_{\chi\sqrt{p+1}}(\gamma r) I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a)) \right] + \\ & + \frac{\chi\sqrt{p}}{r} \left(I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a) - I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$



$$\bar{u}_2(r, p) = K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) + \varepsilon N_1(\rho) \left[-\gamma K_{\chi\sqrt{p}+1}(\gamma r) + \frac{\chi\sqrt{p}}{r} K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) \right] + \dots \quad (4)$$

Для простоты изложения в дальнейшем сохраним в разложениях (3) и (4) только члены порядка ε . Вычислив вронскиан функций $\bar{u}_1, \bar{u}_2$

$$\bar{W}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = -\frac{C_1}{A(\rho)r} K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a),$$

запишем (2) так:

$$\bar{u}(r, p) = \frac{1}{C_1} \int_a^\infty \frac{G(r, \xi, p)}{K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a)} B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) f(\xi) \frac{\partial \xi}{\xi}. \quad (5)$$

Переходя в (5) к оригиналам, приходим к выражению

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{C_1} \int_a^\infty J(r, \xi, t) B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) f(\xi) \frac{\partial \xi}{\xi}, \quad (6)$$

где

$$J(r, \xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{G(r, \xi, p)}{K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a)} e^{pt} dp. \quad (7)$$

Рассмотрим интеграл (7) при $r \leq \xi$, т.е.

$$J(r, \xi, t) \Big|_{r \leq \xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\bar{u}_1(r, p) \bar{u}_2(\xi, p)}{K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma a)} e^{pt} dp. \quad (8)$$

Применяя обычную технику вычисления интеграла (8) и учитывая, что функция $K_\vartheta(z)$, рассматриваемая как функция ϑ , имеет чисто мнимые нули, получим следующее выражение для $J(r, \xi, t)$:

$$J(r, \xi, t) = \frac{2}{\chi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n I_{\mu_n}(\gamma a) e^{-\mu_n^2 t / \chi^2}}{(dK_{i\vartheta}(\gamma a) / d\vartheta) \Big|_{\vartheta=\mu_n}} R_a(r, \mu_n) R_a(\xi, \mu_n), \quad (9)$$

где μ_n — корни уравнения $K_{i\mu_n}(\gamma a) = 0$,

$$R_a(r, \mu_n) = K_{i\mu_n}(\gamma r) + \varepsilon N_1\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(-\gamma K_{i\mu_n+1}(\gamma r) + \frac{i\mu_n}{r} K_{i\mu_n}(\gamma r) \right) + \dots \quad (10)$$

С учетом выражения (9) по формуле (6) находим

$$u(r, t) = \frac{2}{C_1 \chi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n I_{\mu_n}(\gamma a) e^{-\mu_n^2 t / \chi^2}}{(dK_{i\vartheta}(\gamma a) / d\vartheta) \Big|_{\vartheta=\mu_n}} R_a(r, \mu_n) \int_a^\infty R_a(\xi, \mu_n) B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) f(\xi) \frac{\partial \xi}{\xi},$$

откуда при $t = 0$ получим искомое разложение

$$f(r) = \frac{2}{\langle B \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n I_{\mu_n}(\gamma a) R_a(r, \mu_n)}{(dK_{i\vartheta}(\gamma a) / d\vartheta) \Big|_{\vartheta=\mu_n}} \int_a^\infty R_a(\xi, \mu_n) B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) f(\xi) \frac{\partial \xi}{\xi}, \quad (11)$$

Отметим, что при постоянных значениях коэффициентов A, B, D в уравнении (1) локальная функция $N_1(\rho) = 0$, $0 < \rho < 1$ и $R_a(r, \mu_n) = K_{\mu_n}(\gamma r)$ так, что разложение (11) будет совпадать с известной формулой из работы (2).

В качестве примера использования полученного интегрального преобразования рассмотрим задачу стационарной теплопроводности для клиновидной области, заданной в цилиндрической системе координат неравенствами

$$0 < z < h, \quad 0 < r < \infty, \quad |\theta| < \alpha.$$

Пусть данная область состоит из бесконечного числа цилиндрических ячеек $k\varepsilon < r < (k+1)\varepsilon$, $k = 0, 1, 2, \dots, |\theta| < \alpha$, $0 < z < h$ и пусть в пределах каждой ячейки коэффициенты теплопроводности имеют вид

$$k_r = k_r(\rho), \quad k_\theta = \text{const}, \quad k_z = \text{const},$$

где $k_r(\rho)$ — l -периодическая функция "быстрой" переменной $\rho = \frac{r}{\varepsilon}$. Таким

образом, в области $0 < z < h$, $0 < r < \infty$, $|\theta| < \alpha$ следует построить решение $T(r, \theta, z)$ дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r(\rho) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

при условиях

$$T(r, \pm\alpha, z) = \varphi(r, z), \quad 0 < z < h, \quad 0 < r < \infty, \quad (13)$$

$$T(r, \theta, 0) = 0, \quad T(r, \theta, h) = 0, \quad |\theta| < \alpha,$$

$$T(\infty, \theta, z) < \infty. \quad (14)$$

С учетом граничных условий (14) представим функцию $T(r, \theta, z)$ в виде ряда

$$T(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r, \theta) \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right),$$

где функция $T_n(r, \theta)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r(\rho) r \frac{\partial T_n(r, \theta)}{\partial r} \right) - k_z \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 T_n + \frac{k_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 T_n}{\partial \theta^2} = 0. \quad (15)$$

В соответствии с формулой (25) из (1) представим функцию $T_n(r, \theta)$ в виде интеграла

$$T_n(r, \theta) = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\langle k_r^{-1} \rangle}{k_\theta}} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau R_n(\tau, z) \bar{T}(\tau, \theta) d\tau, \quad (16)$$

где $R_n(r, \theta)$ определяется формулой (22) из (1) при $\gamma = \gamma_n = \sqrt{k_z \langle k_r^{-1} \rangle \frac{\pi n}{h}}$, а

локальные функции $N_2^{(2)}, N_2^{(3)}$ можно приравнять нулю, что следует из уравнений (12), (13) из (1) при

$$\langle B \rangle = B(\rho) = k_\theta = \text{const}, \quad \langle D \rangle = D(\rho) = k_z \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 = \text{const}.$$

Таким образом, функция $R_n(\tau, r)$ примет вид

$$R_n(\tau, z) = K_{nr}(\gamma_n r) + \varepsilon N_1(\rho) \frac{d}{dr}(K_{nr}(\gamma_n r)) + \varepsilon^2 N_2^{(1)}(\rho) \frac{d^2}{dr^2}(K_{nr}(\gamma_n r)) + \dots$$

где $N_1(\rho)$, $N_2^{(1)}(\rho)$ являются решениями локальных уравнений (10) и (11) из (1).

Так как $R_n(\tau, r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k_r(\rho) r \frac{dR_n}{dr} \right) - \left[k_z \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 - \frac{\tau^2}{\chi^2} k_\theta \right] R_n = 0,$$

то подстановка (16) в (15) приводит к равенству

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(\tau, \theta)}{\partial \theta^2} - \frac{\tau^2}{\chi^2} \bar{T}(\tau, \theta) = 0, \quad (17)$$

где $\chi^2 = k_\theta < k_r^{-1} >$.

Четное по θ решение уравнения (17) должно иметь вид

$$\bar{T}(\tau, \theta) = a(\tau) ch \left(\frac{\tau \theta}{\chi} \right). \quad (18)$$

С учетом представлений (16) и (18) функция $T(r, \theta, z)$ может быть выражена следующим образом:

$$T(r, \theta, z) = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{< k_r^{-1} >}{k_\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \tau sh(\pi \tau) R_n(\tau, r) a(\tau) ch \left(\frac{\tau \theta}{\chi} \right) d\tau \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{h} \right). \quad (19)$$

Если функцию $\varphi(r, z)$ представить в виде, аналогичном (19):

$$\varphi(r, z) = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{< k_r^{-1} >}{k_\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau sh \pi \tau R_n(\tau, r) \bar{\varphi}(\tau) d\tau \sin \left(\frac{\pi n z}{h} \right) \quad (20)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{2k_\theta}{h} \int_0^h \int_0^{\infty} R_n(\tau, \xi) \varphi(\xi, z) \frac{\partial \xi}{\xi} \sin \left(\frac{\pi n z}{h} \right) dz, \quad (21)$$

то из граничных условий (13) можно получить

$$a(\tau) ch \left(\frac{\tau d}{\chi} \right) = \bar{\varphi}(\tau)$$

и следовательно, представить искомое решение в следующем окончательном виде:

$$\bar{T}(r, \theta, z) = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{< k_r^{-1} >}{k_\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \tau sh \pi \tau R_n(\tau, r) \frac{ch \left(\frac{\tau \theta}{\chi} \right)}{ch \left(\frac{\tau d}{\chi} \right)} \bar{\varphi}(\tau) d\tau \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{h} \right). \quad (22)$$

Аналогичным образом можно построить решение (12) и при других типах граничных условий на гранях $\theta = \pm \alpha$.

Афинский национальный технический университет
Московский институт химического машиностроения

Դ. ՅԱ. ԲԱՐՉՈԿԱՍ, Ա. Ի. ՋՈՔՆԻՆ, **Բ. Ա. ԿՈՒՂՐՅԱՎՅԵՎ**

**Կոնտորովիչ-Լեբեդևի տիպի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության և
առաձգականության տեսության ու ջերմահաղորդականության եզրային
խնդիրների լուծման ժամանակ նրա կիրառության մասին**

Նախորդ աշխատության մեջ շարադրված մեթոդով ընդհանրացված է Կոնտորովիչ-Լեբեդևի ինտեգրալ ձևափոխությունը (a, ∞) կիսաանվերջ միջակայքի համար: Որպես ստացված ինտեգրալ ձևափոխության կիրառություն դիտարկված է փոքր պարամետրով բնութագրվող անվերջ թվով գլանային բլիջներով անվերջ սեպաձև մարմնի համար ստացիոնար ջերմահաղորդականության խնդիրը, երբ սեպի անվերջ նիստերի վրա ջերմաստիճանը տրված է կամայական ֆունկցիայով, իսկ ճակատային նիստերի վրա պահպանվում է զրոյական ջերմաստիճան: Եզրային խնդրի լուծումը կառուցված է ε^2 -ու կարգի անդամը պարունակող մոտավորությամբ, որտեղ ε -ը փոքր պարամետրն է:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

¹ Д.Я.Бардзокас, А.И.Зобнин, Б.А.Кудрявцев, ДНАН Армении, т.98, №4, с.280-286, (1998). ² Я.С.Уфлянд, Вopr. физики, Сб к 75-летию чл.-корр. АН СССР Г.А.Гринберга, Л., Наука, с.93-105 (1976).