

УДК 393.3

М. М. Минасян

Модель твердого тела с внутренней энергией, зависящей от скорости деформаций

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Саркисяном 30/VII 1998)

В данной работе построен вариант модели твердого деформируемого тела с внутренней энергией, зависящей от скорости деформирования. Такую зависимость следует считать вполне естественной как следствие перехода от микронтинуума к макронтинууму ⁽¹⁾.

1 Для однородного тела постулируем удельную внутреннюю энергию в виде

$$U = U(\xi'_j, v'_j, S), \quad (1.1)$$

где ξ'_j – обратная дисторсия, определяющая тензор деформаций Альманси, а v'_j – тензор градиентов скоростей, определяющий тензор скоростей деформаций Эйлера. Введем также дисторсию, x'_j , обратную ξ'_j .

Теперь сформулируем вариационный принцип

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \Lambda d^3x dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \rho T \delta S d^3x dt + \delta W = 0, \quad (1.2)$$

$$\Lambda(u'_k, v', v'_k, \varphi_i, S) = \rho \left(\frac{v^2}{2} - U \right) + \varphi_i (v^i - u'_i - v^k u'_k). \quad (1.3)$$

Истинное движение тела определяется как стационарная точка функционала I на множестве функций $u'(x, t)$ и $v'(x, t)$. Будем считать перемещения заданными во временных пределах интегралов.

Из принципа (1.2) получаем уравнение импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k v_j - \sigma_j^k) = 0, \quad (1.4)$$

$$\sigma_j^k = p_j^k - \frac{d}{dt} T_j^k + T_j^m v_m^k - T_j^k v_m^m - T_m^k v_j^m, \quad (1.5)$$

$$p_j^k = \rho \frac{\partial U}{\partial u_k^j} \xi_j^i, \quad T_j^k = \rho \frac{\partial U}{\partial v_k^j}, \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right), \quad (1.6)$$

Как видно из (1.5), тензор напряжения содержит как материальную производную тензора T_j^k , так и вращательные производные "яуманновской" серии (2). Тензор напряжений разбиваем на две части

$$\sigma_j^k = \Pi_j^k - \frac{\hat{d}}{dt} T_j^k, \quad \Pi_j^k = p_j^k - T_m^k v_j^m, \quad (1.7)$$

$$\frac{\hat{d}}{dt} T_j^k = \frac{d}{dt} T_j^k + T_j^k v_m^m - T_j^m v_m^k. \quad (1.8)$$

Теперь вычислим вариацию W из вариационного принципа. Введение лагранжевых множителей позволяет ограничиться преобразованиями теории упругости. После несложных, но громоздких преобразований получим

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \oint_{\Sigma(t)} \sigma_j^k x_k^j v_m^m \delta u^m ds dt, \quad (1.9)$$

где (v_k) – вектор единичной нормали к границе объема $V(t)$. Как видно, зависимость внутренней энергии, хотя и повышает порядок дифференциального уравнения импульса, однако не приводит к дополнительным естественным граничным условиям. Объясняется это тем, что наибольшие порядки производных по отдельным переменным не меняются.

Из вариационного принципа можно вывести и уравнение энергии. Однако здесь проще получить его путем вычисления мощности сил напряжений, откуда и следует уравнение притока тепла (первое начало термодинамики) в виде

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_j^k v_k^j + T \frac{dS}{dt} + \frac{d}{dt} \left(v_j^k \frac{\partial U}{\partial v_j^k} \right). \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.4) и (1.10) легко выводится уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x^k} (E v^k - \sigma_j^k v^j) - \rho T \frac{dS}{dt} = 0, \quad (1.11)$$

$$E = \rho \left(\frac{v^2}{2} + U - v_k^j \cdot \frac{\partial U}{\partial v_j^k} \right). \quad (1.12)$$

Для замыкания системы следует добавить уравнение теплопроводности. Вместе с этим необходимо проверить выполняемость уравнения энтропии (второе начало термодинамики). Учитывая простоту лагранжевого описания для твердых тел, вышевыведенные соотношения и уравнения переформулируем в лагранжевых переменных и затем проверим непротиворечивость полученной переопределенной системы.

2. С помощью преобразований перехода к лагранжевым переменным определяем новые тензоры следующими формулами:

$$L_j^a = \frac{\rho_0}{\rho} \xi_k^a \Pi_j^k, \quad L_j^a = \frac{\partial U}{\partial u_a'}, \quad U = U(u_a', v_a', S),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} K_j^a = \frac{\rho_0}{\rho} \xi_k^a \frac{d}{dt} T_j^k, \quad K_j^a = \frac{\partial U}{\partial v_a'}. \quad (2.1)$$

Соотношения (2.1) показывают, что тензоры L_j^a и Π_j^a относятся друг к другу как тензоры напряжений Лагранжа и Эйлера в теории упругости, а изменения тензоров K_j^a и T_j^k связаны соотношением, установленным Хиллом для зависимости между теми же тензорами Лагранжа и Эйлера (3).

Если переписать уравнения импульса и притока тепла в лагранжевых переменных и добавить законы теплопроводности (скажем, закон Фурье) и энтропии, то получим следующую переопределенную систему:

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi^a} \Sigma_i^a, \quad \Sigma_i^a = L_i^a + \frac{\partial}{\partial t} K_i^a,$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + U - v_a' \frac{\partial U}{\partial v_a'} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^a} (\Sigma_i^a v_i') + \frac{\partial q^a}{\partial \xi^a},$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(U - v_a' \frac{\partial U}{\partial v_a'} \right) = \Sigma_i^a v_i' + \rho_0 T \frac{\partial S}{\partial t},$$

$$\rho_0 \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial J^a}{\partial \xi^a} = k q^a q_a \geq 0,$$

$$q_a = k \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\frac{1}{T} \right), \quad J^a = \frac{q^a}{T}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}. \quad (2.2)$$

Легко проверить, что эта система непротиворечива в той же мере, что и переопределенные системы термоупругости (4).

3. После установления общих уравнений и соотношений приступим к построению конкретной модели.

С этой целью примем несколько упрощенных предположений. Рассмотрим тело изотропным, а деформации — малыми. Будем считать, что внутренняя энергия зависит от скорости деформирования только в процессе активного нагружения (о разгрузке будет сказано ниже). Постулируем внутреннюю энергию в следующем виде:

$$U = U(J_1, e_I, e_I^*, S), \quad (3.1)$$

$$J_1 = \varepsilon_{kk}, \quad e_I^2 = J_2^D = e_{ij} e_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad e_I^* = \frac{\partial e_I}{\partial t}, \quad \frac{\partial e_I}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial e_I^*}{\partial e_{ij}^*} = \frac{e_{ij}}{e_I},$$

где J_1 – первый инвариант тензора малых деформаций ε_{ij} , J_2^D – второй инвариант девиатора e_{ij} . Обратим внимание на то, что в отличие от известных моделей вязкоупругих или вязкопластических тел, в которых фигурирует интенсивность скоростей деформаций, здесь имеем дело со скоростью интенсивностей деформаций. Пользуясь внутренней энергией, представленной в виде (3.1), для напряжений получим

$$\sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial J_1} \delta_{ij} + \rho_0 \left[\frac{\partial U}{\partial e_1} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{e}_1} \right) \right] \frac{e_{ij}}{e_1}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует параллельность девиаторов напряжений и деформаций при любом законе активного напряжения.

Для дальнейшей конкретизации модели примем следующее определение внутренней энергии:

$$\rho_0 U(J_1, e_1, \dot{e}_1) = f(J_1) + g(e_1)[1 + \varphi(\dot{e}_1)]. \quad (3.3)$$

Тогда для напряжений получим

$$\sigma_{ij} = K(J_1) J_1 \delta_{ij} + 2G(\dot{e}_1)[1 + \varphi(\dot{e}_1) - \dot{e}_1 \varphi'(\dot{e}_1)] e_{ij} - g(e_1) \dot{e}_1'' \varphi''(\dot{e}_1) e_{ij} / e_1, \quad (3.4)$$

$$K = \frac{f'(J_1)}{J_1}, \quad 2G = \frac{g'(e_1)}{e_1}.$$

Для функции $\varphi(\dot{e}_1)$, которую будем считать невогнутой, примем следующие асимптотические оценки:

$$\begin{aligned} \varphi(\dot{e}_1) &\approx k_0 \dot{e}_1, \quad \dot{e}_1 / \alpha \ll 1, \\ \varphi(\dot{e}_1) &\approx \varphi_0 + k_1 \dot{e}_1, \quad \dot{e}_1 / \alpha \gg 1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая свойства функции $\varphi(\dot{e}_1)$ и допущение малости деформаций, можно пренебречь последним слагаемым в определении напряжений. Тогда получим

$$\sigma_{ij} = K(e_1) J_1 \delta_{ij} + 2G(\dot{e}_1)[1 + \psi(\dot{e}_1 / \alpha)] e_{ij}, \quad (3.6)$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - x\varphi'(x), \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(x) > 0, \quad x \geq 0. \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.6) следует

$$\sigma = 3KJ_1, \quad (\sigma = \sigma_{kk}), \quad \sigma_{ij} = 2G[1 + \psi(\dot{e}_1 / \alpha)] e_{ij}. \quad (3.8)$$

Свойства функций $\varphi(\dot{e}_1)$ и $\psi(\dot{e}_1 / \alpha)$ схематично показаны на рис.1 и 2.

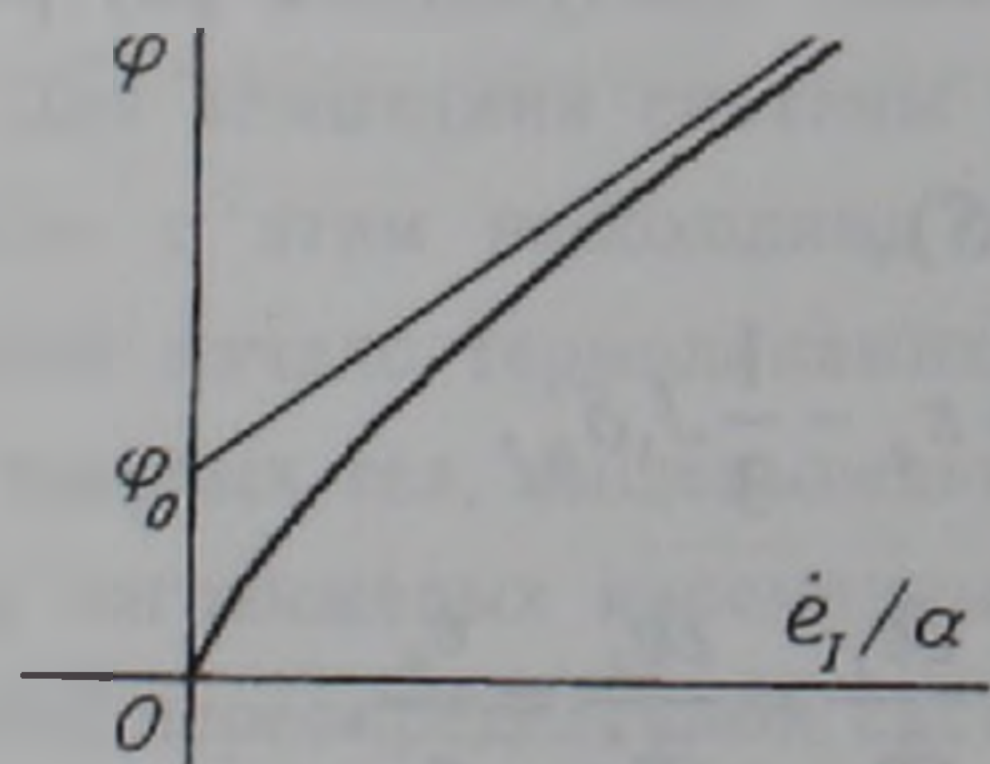


Рис.1

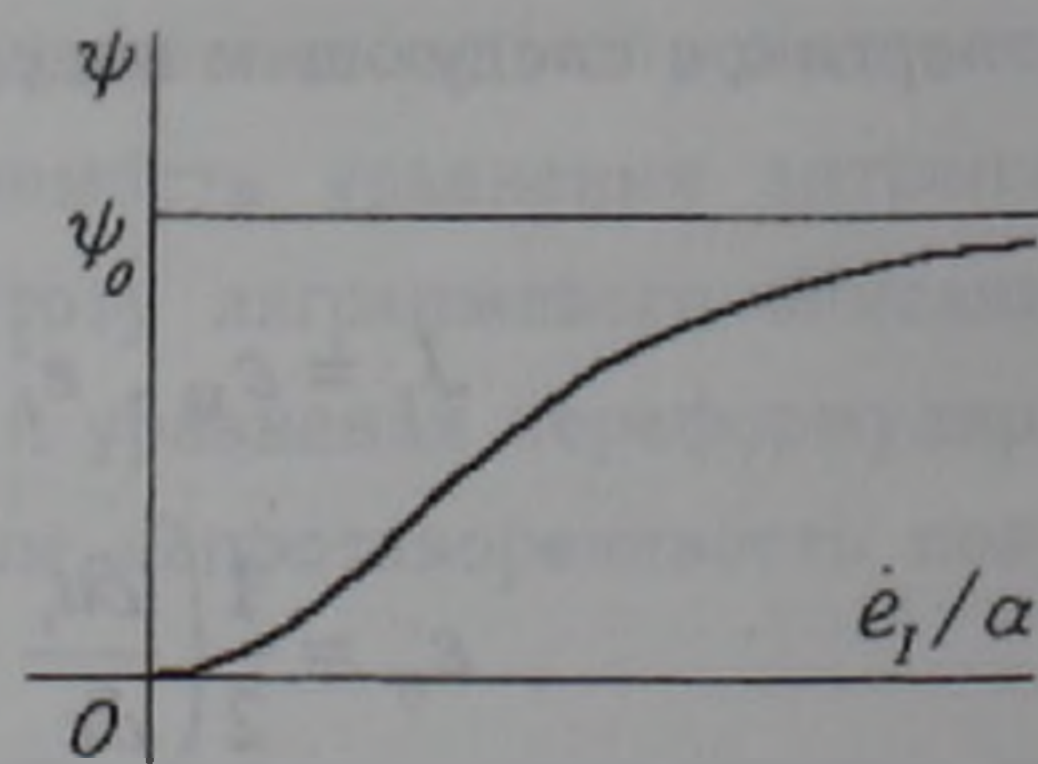


Рис.2

Анализ вышеприведенных соотношений показывает, что при очень малых и очень больших скоростях деформирования напряжения и деформации связаны соотношениями упругости. Если в первом случае можно говорить о существовании нижнего порога чувствительности, известного в различных моделях вязкопластичности ⁽⁵⁾, то во втором случае можно говорить о существовании единой динамической модели, известной при высокоинтенсивных нагружениях ⁽⁵⁾. Отметим также, что при любом нагружении с постоянной скоростью изменения интенсивности деформаций материал ведет себя как упругое тело с "приобретенными" динамическими характеристиками.

Поведение материала при разгрузке не является логическим продолжением его поведения в процессе нагружения. Как правило, оба процесса не описываются единой моделью. Здесь в основном исходят из данных опыта над конкретными телами. Для материалов, чувствительных к скорости деформирования, эти данные указывают на весьма сложный характер поведения при разгрузках, и поэтому приходится в некоторой степени идеализировать этот процесс. Если при полном снятии напряжений остаточные деформации не наблюдаются или столь малы, что ими можно пренебречь, то наиболее простым будет предположение об упругом восстановлении ненапряженного состояния. В нашем случае такое предположение особенно легко осуществить, поскольку процесс активного нагружения завершается на "упругом" напряженно-деформированном состоянии.

Для материалов, которые при квазистатическом нагружении имеют гуковское поведение, имеем

$$\sigma_{ij} = 3K_0 J_1 \delta_{ij} + 2\mu_0 [1 + \psi(e_i^* / \alpha)] e_{ij}, \quad (3.9)$$

где K_0 и μ_0 — известные упругие постоянные. Для интенсивности напряжений согласно (3.9) получим

$$\sigma_i = 2\mu_0 [1 + \psi(e_i^* / \alpha)] e_i. \quad (3.10)$$

Для конкретных материалов вид функции ψ и постоянную α следует определять из данных экспериментов. Закон (3.10) позволяет сделать это, пользуясь данными опыта на простые нагружения, например, при одноосном растяжении или кручении круговых цилиндрических стержней.

Одномерная модель (3.13) предложена и исследована в работе ⁽⁶⁾. Путем сравнения с известными экспериментальными данными показано, что она с достаточно высокой точностью описывает динамическое поведение ряда полимерных материалов.

4. В заключение заметим, что предложенную здесь модель деформируемого тела, предусмотренную для описания процесса нагружения в пределах, когда при квазистатическом испытании не достигается предел текучести, можно использовать для оценки этого предела, в зависимости от скорости деформации при динамическом испытании. В пользу высказанного можно привести

следующую известную формулу для определения динамического предела текучести при одномерных испытаниях ⁽⁷⁾:

$$\sigma_{dm} = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{1}{D} \frac{d\varepsilon}{dt} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (4.1)$$

где σ_0 – статический предел текучести, а D и n – константы материала. Соотношение (4.1) позволяет применить одномерную модель (3.13) вплоть до достижения предела текучести. Следующие соображения позволяют думать о том, что эту же модель при желании можно продолжить в области пластичности. Здесь достаточно вспомнить модели Мальверна – Соколовского и с обобщениями Пэжины и др. Интересно, что в этом случае вхождение в определяющие соотношения октаэдрических касательного напряжения и сдвига выглядит вполне естественно.

Ереванский государственный университет

Մ. Մ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Պինդ մարմնի մոդելը, երբ նրա ներքին էներգիան կախված է դեֆորմացիաների արագությունից

Աշխատանքում կառուցված է պինդ մարմնի մոդել, որի ներքին էներգիան ակտիվ բևեռավորման պրոցեսում կախված է դեֆորմացիաների արագությունից: Հիմնականում հավասարումները ստացվել են վարիացիոն սկզբունքից: Ցույց է տրվել, որ գերորոշված համակարգը համատեղելի է և չի հակասում ջերմադինամիկայի սկզբունքներին: Շարժման ոչ գծային հավասարումները ներկայացված են և՛ էլեբրյան և՛ լագրանժյան կոորդինատներով: Քննակրված է մոդելի կոնկրետ օրինակ: Ցույց է տրված, որ այդ մոդելով հնարավոր է բացատրել իրական պինդ դեֆորմացվող մարմինների այնպիսի առանձնահատկությաններ, որոնք չեն բացատրվում հայտնի մոդելներով: Դրանց թվին են պատկանում դեֆորմացիաների արագության նկատմամբ դինամիկական ստորին շեմի գոյությունը և մեծ արագությունների դեպքում միացյալ դինամիկական կորի առկայությունը:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

- ¹ Л.И.Седов, ПММ, т.32, вып.5, с.771-785 (1968). ² Л.И.Седов, Введение в механику сплошных сред, М., Изд. физ.-мат. лит., 1962. ³ В.Прагер, Введение в механику сплошных сред, М., ИЛ, 1963. ⁴ В.Л.Бердичевский, Вариационные принципы механики сплошных сред, М., Наука, 1983. ⁵ Р.А.Васин, В.С.Ленский, Э.В.Ленский, в сб.: Проблемы динамики упругопластических сред, под ред. Г.С.Шапира, Мир, 1975. ⁶ S.A.Ambartsumian, M.M.Minassian, J. Nonlinear Mech., v.21, №1, p.27-36 (1986). ⁷ П.Саймондс, в кн.: Механика, новое в зарубежной науке, под ред. А.Ю.Ишлинского, Г.Г.Черного, М., Мир, 1982.