

УДК 539.3

В. О. Мовсисян, академик НАН Армении М. А. Задоян

**Термонапряженное состояние упрочняющейся
конической трубы**

(Представлено 25 / XI 1997)

Исследуется бесконечная коническая труба из упрочняющегося по степенному закону несжимаемого материала, свободная от внешних сил и находящаяся в стационарном температурном поле. Принимаем, что на внутренней конической поверхности $\theta = \alpha$ поддерживается постоянная температура T_1 , а на внешней поверхности $\theta = \beta$ — T_2 . Для определенности полагаем, что $T_1 > T_2$. Термонапряженное состояние цилиндрических труб и полых шаров, изготовленных из идеально-пластического материала, исследовано в работах (1,2). Для случая внешних силовых воздействий на конические трубы задача рассмотрена в (3).

Поскольку температурное поле является осесимметричным, стационарное уравнение теплопроводности в сферических координатах запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0,$$

причем температурная функция T не зависит от азимутальной координаты. Поскольку граничные условия на бесконечных конических поверхностях не зависят от радиальной координаты r , то естественно полуобратным способом принимать, что T не зависит от этой координаты. Таким образом, температурная функция, удовлетворяющая приведенным уравнениям теплопроводности, с учетом вышеуказанных граничных условий будет

$$T = \nu - \mu \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (1)$$

где

$$\mu = \frac{t}{\ln \frac{\beta}{\alpha}}, \quad \nu = \frac{1}{\ln \frac{\beta}{\alpha}} \left(T_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - T_2 \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right),$$

причем $t = T_1 - T_2$.

Условия несжимаемости в перемещениях пишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = 3\alpha_0 T. \quad (2)$$

Перемещения зададим в виде

$$u = C\alpha_0 r, \quad v = \alpha_0 r f(\theta), \quad (3)$$

где $f(\theta)$ искомая функция, C — произвольная постоянная, α_0 — коэффициент температурного расширения.

Подставляя (3) в (1), приходим к дифференциальному уравнению

$$f' + f \operatorname{ctg} \theta = -3B - 3\mu \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (4)$$

где $B = C - \nu$. Решение этого уравнения будет

$$f = \frac{3A}{\sin \theta} + 3B \operatorname{ctg} \theta + 3\mu \left(\operatorname{ctg} \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\ln \sin \theta}{\sin \theta} \right), \quad (5)$$

причем A — произвольная постоянная.

Принимаем степенной закон упрочнения

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m,$$

где σ_0, ε_0 — интенсивности напряжений и деформации, k и m известные механические параметры, определяемые из эксперимента.

В наших условиях касательные напряжения и деформации сдвигов равны нулю, а компоненты нормальных напряжений выражаются через компоненты деформации по соотношениям деформационной теории

$$\sigma_i - \sigma = k\varepsilon_0^{m-1} \varepsilon_i, \quad (6)$$

где $i = r, \theta, \varphi$, а σ — среднее нормальное напряжение.

Учитывая выражения перемещения из (3) и соотношения (5), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta - k\alpha_0 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{m-1} \left(\sqrt{f'^2 - f f \operatorname{ctg} \theta + f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} \right)^{m-1} f', \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta - k\alpha_0 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{m-1} \left(\sqrt{f'^2 - f f \operatorname{ctg} \theta + f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} \right)^{m-1} (f \operatorname{ctg} \theta - f'). \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение равновесия сводится к одному:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + (\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi}) \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (8)$$

Далее, интегрируя (8), учитывая второе соотношение (7) и граничное условие на внутренней конической поверхности $\theta = \alpha$, получим

$$\sigma_{\theta} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{m-1} k \alpha_0 \int_{\alpha}^{\theta} \left(\sqrt{f'^2 - f f \operatorname{ctg} \theta + f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} \right)^{m-1} (f \operatorname{ctg} \theta - f') d\theta. \quad (9)$$

Вводим новую функцию ψ по выражению

$$\psi = \frac{f'}{f} \operatorname{tg} \theta. \quad (10)$$

Далее, исключая f' согласно (4), находим

$$\psi = -1 - \frac{3}{f} \left(B + \mu \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{tg} \theta \quad (11)$$

или, подставляя значение f из (5) в (11), получим

$$\psi = -1 - \frac{B \operatorname{tg} \theta + \mu \operatorname{tg} \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\frac{A}{\sin \theta} + B \operatorname{ctg} \theta + \mu \left(\operatorname{ctg} \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\ln \sin \theta}{\sin \theta} \right)}.$$

Выражение (9), если использовать (10), можно переписать в форме

$$\sigma_{\theta} = k \alpha_0 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{m-1} \int_{\alpha}^{\theta} \left(\sqrt{\psi^2 - \psi + 1} \right)^{m-1} (1 - \psi) (f \operatorname{ctg} \theta)^m d\theta. \quad (12)$$

Для радиального напряжения будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_{\theta} - k \alpha_0 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{m-1} \left(\sqrt{\psi^2 - \psi + 1} \right)^{m-1} \psi (f \operatorname{ctg} \theta)^m. \quad (13)$$

На внешней конической поверхности $\theta = \beta$ имеем граничное условие $\sigma_{\theta}(\beta) = 0$, тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{\psi^2 - \psi + 1} \right)^{m-1} (1 - \psi) (f \operatorname{ctg} \theta)^m d\theta = 0. \quad (14)$$

Выражения компонентов напряжения содержат две неизвестные постоянные A и B .

Интегральные условия (14) содержат эти постоянные. Для нахождения второго условия рассмотрим равновесия конечной части конической трубы с выделенной сферической поверхностью с центром на вершине трубы и с радиусом r . Проецируя радиальные силы от напряжения σ_r , действующие на указанной сферической поверхности, на оси трубы находим

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma_r \sin 2\theta d\theta = 0 \quad (15)$$

Подставляя выражение σ_r из (13) в (15) и преобразуя предварительно двойной интеграл в одномерный, интегрируя по частям, окончательно получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} [1 - \sin(\beta + \theta) \sin(\beta - \theta)] \left(\sqrt{\psi^2 - \psi + 1} \right)^{m-1} (1 - \psi) f^m \operatorname{ctg}^m \theta d\theta = 0. \quad (16)$$

Интегральные условия (14) и (16) в принципе определяют неизвестные постоянные A и B . Имея эти значения, найденные численными способами, определяют компоненты напряжения в зависимости от T_1 , T_2 и $t = T_1 - T_2$.

В отличие от идеально-пластических материалов для упрочняющейся трубы, напряжения в исследуемом случае зависят как от разности температур, так и от значения температуры на внутренней и внешней поверхностях.

Институт механики НАН Армении

Վ. Ո. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Ամրապնդվող կոնական խողովակի ջերմալարվածային վիճակը

Հետազոտվում է հաստապատ կոնական խողովակի լարվածային վիճակը՝ ստացիոնար ջերմային դաշտի ազդեցության տակ: Խողովակը ընդունվում է երկար, անսեղմելի և աստիճանային օրենքով ամրապնդվող նյութից պատրաստված, որի ներքին և արտաքին կոնական մակերևույթներին պահպանվում են հաստատուն ջերմաստիճաններ: Ելնելով փոքր առաձգապլաստիկական դեֆորմացիաների տեսությունից, կիսահակադարձ եղանակով, տալով տեղափոխությունների դաշտը, սգտագործելով անսեղմելիության պայմանը, եզրային պայմանների կոնական մակերևույթների վրա, ինչպես նաև հավասարակշռության հավասարումը կոնի վերջավոր մասի համար, գալիս ենք երկու անորոշ հաստատումների որոշման համար երկու հավասարումներից բաղկացած համակարգի, որը պետք է լուծվի թվավային եղանակով:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

¹ Л.М. Качанов, ЖТФ, №10, 1940. ² J. Subliner, Plasticity Theory, N.Y., Macmillan Publishing. Comp., 1990. ³ М.А. Задоян, Пространственные задачи теории пластичности, М., Наука, 1992.