ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 99 1999 №1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Р. А. Багиян

К вопросу обращения одного интегрального преобразования

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Закаряном 21/X 1998)

1. В данной работе исследуется вопрос обращения интегрального преобразования

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}k\left(\frac{x}{t}\right)f(t)dt,\ \ x>0,\ \ f(t)\in L_2(0,+\infty). \tag{1}$$

Если ядро преобразования $k(x)$ двойственно по Меллину с $[E(s)]^{-1}$, где $E(s)\in E_0$ – известному классу целых функций Лагерра – Полиа (см. [1], с.51), то для почти всех $x>0$ имеет место формула обращения

$$E(\theta)g(x)=f(x),\qquad \theta\equiv -x\frac{d}{dx}.$$

Это классическая теорема Д.Уиддера [2]. Заметим, что с помощью подходящей замены переменной из (1) получится известное преобразование типа свертки, которому посвящена книга [1].

В монографии [3] введен класс целых функций $\mathscr{P}$, обобщающий класс целых функций Лагерра – Полиа (см. [3], с.86). Функция $\Phi(s)$, определенная на прямой $\operatorname{Re}s=\dfrac{1}{2}$, принадлежит классу $\mathscr{P}$, если:

а) $\Phi(s)$ непрерывна и отлична от нуля на всей прямой $\operatorname{Re}s=\dfrac{1}{2}$;

б) существуют последовательность полиномов $\{P_n(s)\}_1^\infty$ и число $M>0$ такие, что

$$|P_n(s)|\le M|\Phi(s)|,\ \operatorname{Re}s=\frac{1}{2},\ (n=1,2,\ldots)$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(s)=\Phi(s)$ в каждой точке прямой $\operatorname{Re}s=\dfrac{1}{2}$. Если в класс E_0 Лагерра – Полиа входят целые функции, то в более широкий класс $\mathscr{P}\supset E_0$ могут входить и нецелые функции.

2. Целью данной работы является обобщение известного результата Уиддера об обращении преобразования (1) на случай функций из класса $\mathcal{S}$. Метод доказательства этой теоремы существенно отличается от метода Д.Уиддера, который не проходит в случае общих классов функций $\mathcal{S}$. Этот метод позволяет дать другое доказательство основных теорем из статей ([4]) и ([5]). Затем в качестве примера используется полученная обобщенная формула обращения к одному частному интегральному преобразованию, рассмотренному в статье автора ([6]).

Теорема. Пусть $\Phi(s)\in\mathcal{S}$, *а функции* $k(x)$ *и* $K(s)=[\Phi(s)]^{-1}$ *двойственны по Меллину. Тогда интегральное преобразование (1) обращается формулой*

$$\Phi(\theta)g(x)=f(x), \qquad \left(\theta\equiv -x\frac{d}{dx}\right). \tag{2}$$

Доказательство. После замены переменной в интеграле (1) $t=xy$ получим

$$g(x)=\int_0^\infty \frac{1}{y}k\left(\frac{1}{y}\right)f(xy)dy. \tag{3}$$

Пусть $H(s)$, $F(s)$ и $G(s)$ – преобразования Меллина соответственно для функций $h(t)=\frac{1}{t}k(\frac{1}{t})$, $f(t)$ и $g(t)$, принадлежащих классу $L_2(0,+\infty)$. Известно, что в этом случае $H(s)=K(1-s)$ или $H(1-s)=K(s)=[\Phi(s)]^{-1}$ и на основании обобщенной формулы Парсеваля

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} H(1-s)F(s)x^{-s}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{F(s)}{\Phi(s)}x^{-s}ds.$$

Следовательно, $G(s)=F(s)[\Phi(s)]^{-1}$. Так как $\Phi(s)\in\mathcal{S}$, то, применяя результат из монографии (3) (см. с.90, лемма 2.4), получим, что функции $\Phi(\theta)g(x)$ и $\Phi(s)G(s)$ двойственны по Меллину, т.е.

$$\Phi(\theta)g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\Phi(s)G(s)x^{-s}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}F(s)x^{-s}ds=f(x).$$

Формула обращения (2) установлена.

3. В качестве примера используем доказанную теорему в вопросе обращения интегрального преобразования

$$F(x)=\int_0^{+\infty} f(xt)\Phi_{\rho,\mu}(t)dt, \quad \left(1<\rho<\infty,\ \mu\geq\frac{1}{\rho}\right),$$

где $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ – подробно исследованная в статье ([7]) функция. Кроме того в статье ([6]) вычислено преобразование Меллина для этой функции, которое равно

$$H_{\rho,\mu}(s)=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{s-1}{\rho}\right)} \quad \left(1<\rho<\infty,\ \mu\geq\frac{1}{\rho}\right).$$

Положим $\Phi_{\rho,\mu}(t)=\frac{1}{t}k(\frac{1}{t})$ и заметим, что если $k(x)$ двойственно по Меллину с $K(s)$, то $H_{\rho,\mu}(s)=K(1-s)$.

В ([6]) установлено, что функция $[K(s)]^{-1}=[H_{\rho,\mu}(1-s)]^{-1}\in\mathscr{P}$ на прямой $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$. Остается воспользоваться теоремой, взяв в качестве функции $\Phi(s)$ функцию $[H_{\rho,\mu}(1-s)]^{-1}$. По формуле (2) теоремы будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{H_{\rho,\mu}(1-\theta)}\{F(x)\}=\frac{\Gamma\left(\mu-\dfrac{\theta}{\rho}\right)}{\Gamma(1-\theta)}\{F(x)\},$$

где $\theta\equiv -x\dfrac{d}{dx}$.

В заключение отметим, что в ([6]) эта формула получена иным способом, а именно, применением одной общей теоремы из монографии ([3]).

Государственный инженерный университет Армении

Ռ. Ա. ԲԱՂԻՅԱՆ

Մի ինտեգրալ ձևափոխության շրջման վերաբերյալ

Հոդվածում դիտվում է հետևյալ ինտեգրալ ձևափոխությունը.

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}k(\frac{x}{t})f(t)dt,\quad f(t)\in L_2(0,+\infty):$$

Հայտնի է Ուիդերի դասական թեորեմը՝ եթե $k(x)$ *երկակի է ըստ Մելինի* $K(s)=[E(s)]^{-1}$ *ֆունկցիայի հետ, որտեղ* $E(s)\in E_0$ *Լագեր-Պոլիայի դասին, ապա տեղի ունի հետևյալ շրջման բանաձևը.*

$$E(\theta)g(x)=f(x),\ \theta\equiv -x\frac{d}{dx}:$$

Հոդվածում ընդհանրացվում է այդ արդյունքը կամայական $\mathscr{P}\supset E_0$ *դասերի համար: Վերջում բերվում է որպես օրինակ ապացուցված թեորեմի մի կիրառություն:*

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И.И.Хиршман, Д.В.Уиддер*, Преобразования типа свертки, М. ИЛ, 1958 [2] *D.V.Widder*, J.Analyse Math. v.21, p.293-312, (1968). [3] *М.М.Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966. [4] *C.Nasim*, J.Math.Anal.Appl., v.52, p.525-537 (1975) [5] *C.Nasim*, J.Math.Anal.Appl., v.678, p.163-170 (1979). [6] *Р.А.Багиян*, ДАН АрмССР., г.73, №4, с.195-201 (1981) [7] *М.М.Джрбашян, Р.А.Багиян*, ДАН СССР, т.223, №6, с.1297-1300 (1975); Изв.АН АрмССР., Математика, т.10, №6, с.483-508 (1975).