ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №4

ГИДРАВЛИКА

УДК 551.49

С. М. Казарян, С. С. Казарян

Расчет линейного ряда скважин в многослойной фильтрующей среде при откачке из нижнего водоносного горизонта

(Представлено академиком НАН Армении В.С. Саркисяном 24/III 1998)

Рассматриваются аналитические решения задачи определения понижения уровней подземных вод в любых точках многослойных, гидравлически связанных неограниченных пластов в любой момент времени. При этом неустановившаяся фильтрация происходит в линейном ряде скважин, через которые производится постоянная суммарная откачка воды только из нижнего напорного водоносного горизонта (рис.1).

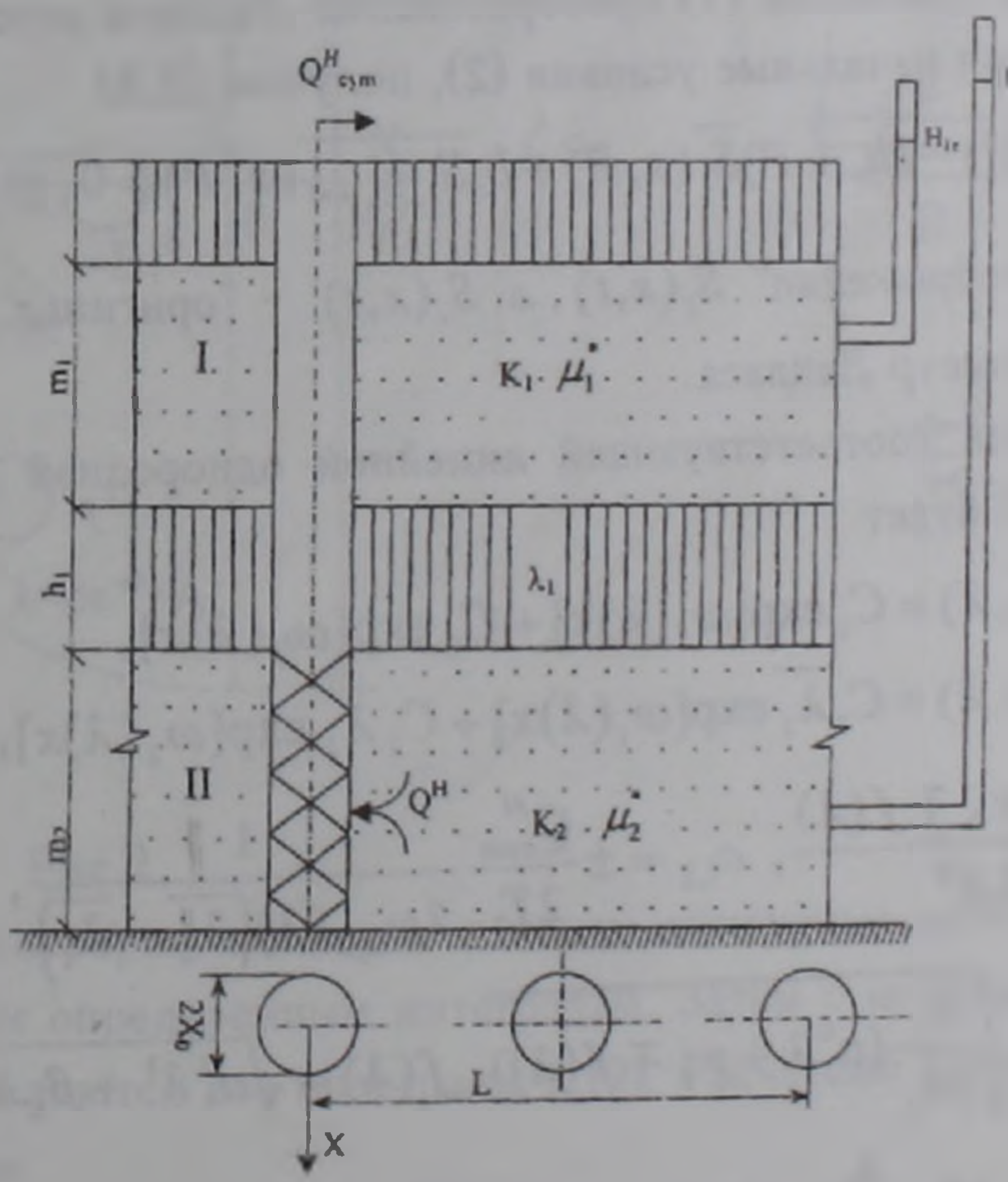

Рис.1.

Процесс фильтрации подземных вод в неограниченной, гидравлически связанной трехслойной среде с учетом перетекания при жестком режиме в раздельном слое в вышеуказанной постановке задачи описывается следующей системой дифференциальных уравнений ([1]) и краевыми условиями:

$$a_i \frac{\partial S_i^2(x,t)}{\partial x^2} - b_i(S_i(x,t) - S_{i+(-1)^{i+1}}(x,t)) = \frac{\partial S_i(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$S_i(x,t) = 0;\ t = 0; \tag{2}$$

$$S_i(x,t) = 0;\ t > 0,\ x \to \infty; \tag{3}$$

$$\frac{\partial S_1(x,t)}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial S_2(x,t)}{\partial x} = -\frac{Q_2}{2T_2 L} = \text{const},\ t > 0,\ \chi_0 \to 0; \tag{4}$$

где

$$a_i = \frac{(km)_i}{\mu_i^*};\ b_i = \frac{\lambda_1}{h_i \mu_i^*};\ S_i(x,t) = H_{ei} - H_i(x,t),\ (i = 1,2). \tag{5}$$

Здесь a_i – коэффициент пьезопроводимости, b_i – коэффициент перетекания, $S_i(x,t)$ – понижение уровня подземных вод, $(km)_i = T_i$ – водопроводимость – произведение коэффициента фильтрации и мощности, μ_i^* – коэффициент упругой водоотдачи, λ_1 – коэффициент фильтрации раздельного слоя, h_1 – мощность того же слоя, H_{ci} – пьезометрические напоры в естественных условиях, $H_i(x,t)$ – напор в любой точке в любой момент времени, L – длина линейного ряда скважин.

Применяя для уравнения (1) преобразование Лапласа относительно переменной t и учитывая начальные условия (2), получим (2,3)

$$a_i \overline{S''}_i(x,P) - (b_i + P)\overline{S_i}(x,P) + b_i \overline{S_{i+(-1)^{\alpha+1}}}(x,P) = 0,\ (i = 1,2), \tag{6}$$

где $\overline{S_i}(x,P)$ – "изображение" $S_i(x,t)$, а $S_i(x,t)$ – "оригинал" $\overline{S_i}(x,P)$, P – операционный параметр Лапласа.

Общее решение соответствующей линейной однородной системы (6) с учетом условий (3) будет

$$\begin{aligned} \overline{S_1}(x,\lambda) &= C_1 \exp[\omega_1(\lambda)x] + C_2 \exp[\omega_2(\lambda)x], \\ \overline{S_2}(x,\lambda) &= C_1 \overline{\lambda_1} \exp[\omega_1(\lambda)x] + C_2 \overline{\lambda_2} \exp[\omega_2(\lambda)x], \end{aligned} \tag{7}$$

где $\overline{\lambda}_{1,2} = \dfrac{a_0\lambda + \gamma_0^- \mp f(\lambda)}{2A^0}$, $c_{1,2} = \pm \dfrac{Q_{sum}^H}{2T_2} \dfrac{1}{\lambda\omega_{1,2}(\lambda)\left(\overline{\lambda_2} - \overline{\lambda_1}\right)}$,

$$\begin{gathered} \omega_{1,2}(\lambda) = -\sqrt{\frac{b_1}{2a_2}(a_1^0\lambda + \gamma_0 \mp f(\lambda))},\ f(\lambda) = \sqrt{a_0^2\lambda^2 + \beta_0\lambda + \gamma_0^2}, \\ A^0 = \frac{a_2}{a_1},\ B^0 = \frac{b_2}{b_1},\ \gamma_0^\pm = A^0 \pm B^0,\ a^0 = A^0 - 1,\ a_1^0 = A^0 + 1, \\ \beta_0 = 2a_0\gamma_0^-,\ P = \lambda b_1,\ \omega_{1,2}^0 = \sqrt{a_1^0\lambda + \gamma_0 \mp f(\lambda)}. \end{gathered} \tag{8}$$

Значения C_1 и C_2 определялись из граничных условий (4).

Подставляя (8) в (7) и переходя от отображающей функции к ее оригиналу, применяя теорему обращения для преобразования Лапласа, получим [2,3]

$$S_i(x,t)=\frac{Q_{sum}^H}{2T_2}\sqrt{\frac{2a_2}{b_1L^2}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\lambda\tau}\left(\Phi_{i1}^He^{\omega_1x}+\Phi_{i2}^He^{\omega_2x}\right)d\lambda, \tag{9}$$

где $$\Phi_{11,2}^H=\mp\frac{A^0}{\lambda f(\lambda)\omega_{1,2}^0};\ \Phi_{21,2}^H=\mp\frac{a_0\lambda+\gamma_0^-\mp f(\lambda)}{2\lambda f(\lambda)\omega_{1,2}^0}. \tag{10}$$

Подынтегральные функции (9) имеют точки разветвления. Поэтому при дополнении контура L влево полукругом большого радиуса (R_{Π}) надо обойти все точки разветвления [2,3]. Полученные контуры изображены на рис.2,3 соответственно для функции $\omega_1(\lambda)$ и $\omega_2(\lambda)$. Для функции $\omega_1(\lambda)$ точки $\lambda_{1,2}=-\Phi\pm i\psi$ являются нулями внутреннего квадратного корня и точками разветвления, $\lambda_3=-(1+B^0)$ есть точка разветвления (рис.2). Для функции $\omega_2(\lambda)$ $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_3=0$ являются точками разветвления (рис.3).

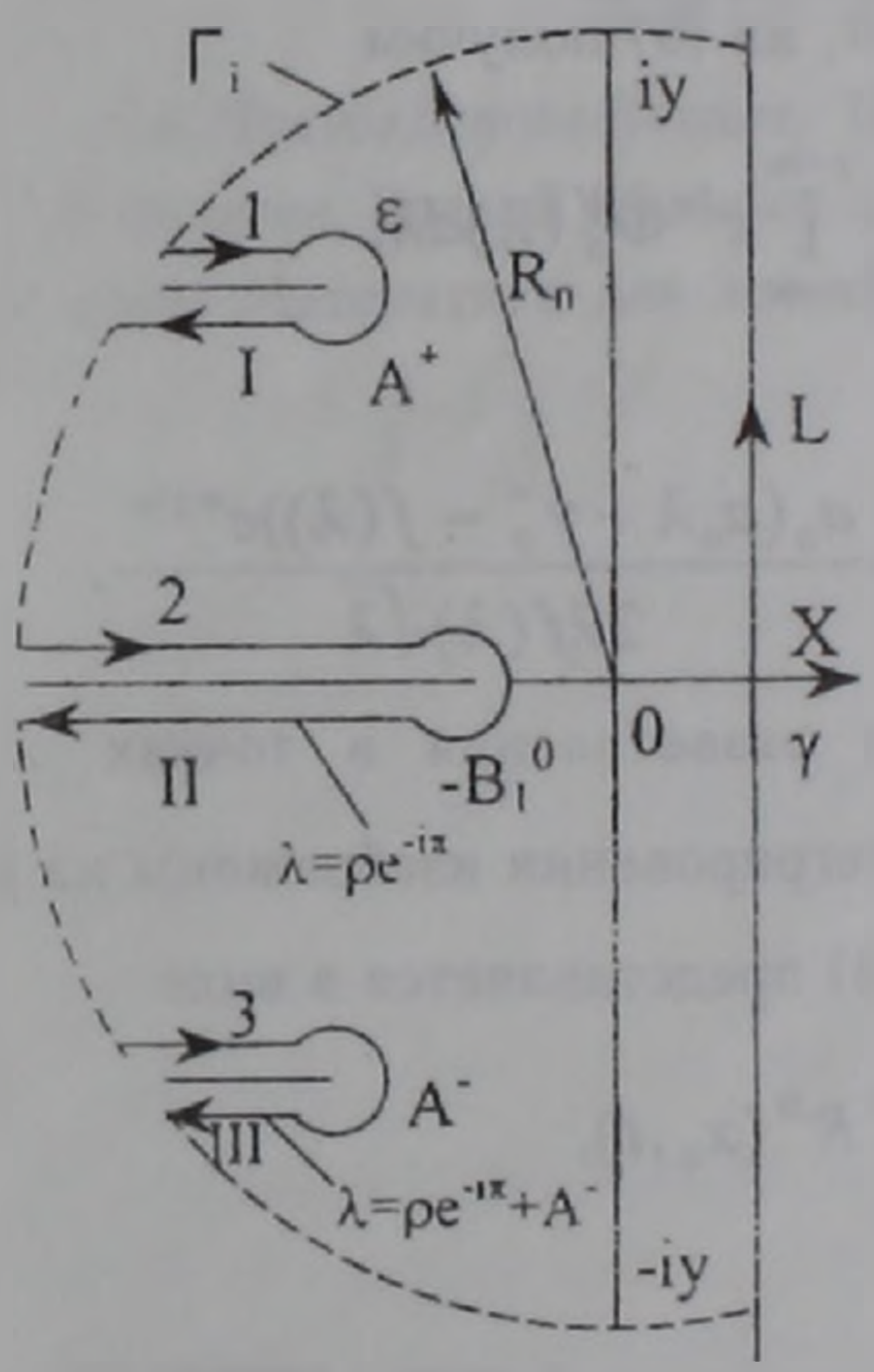

Рис.2.

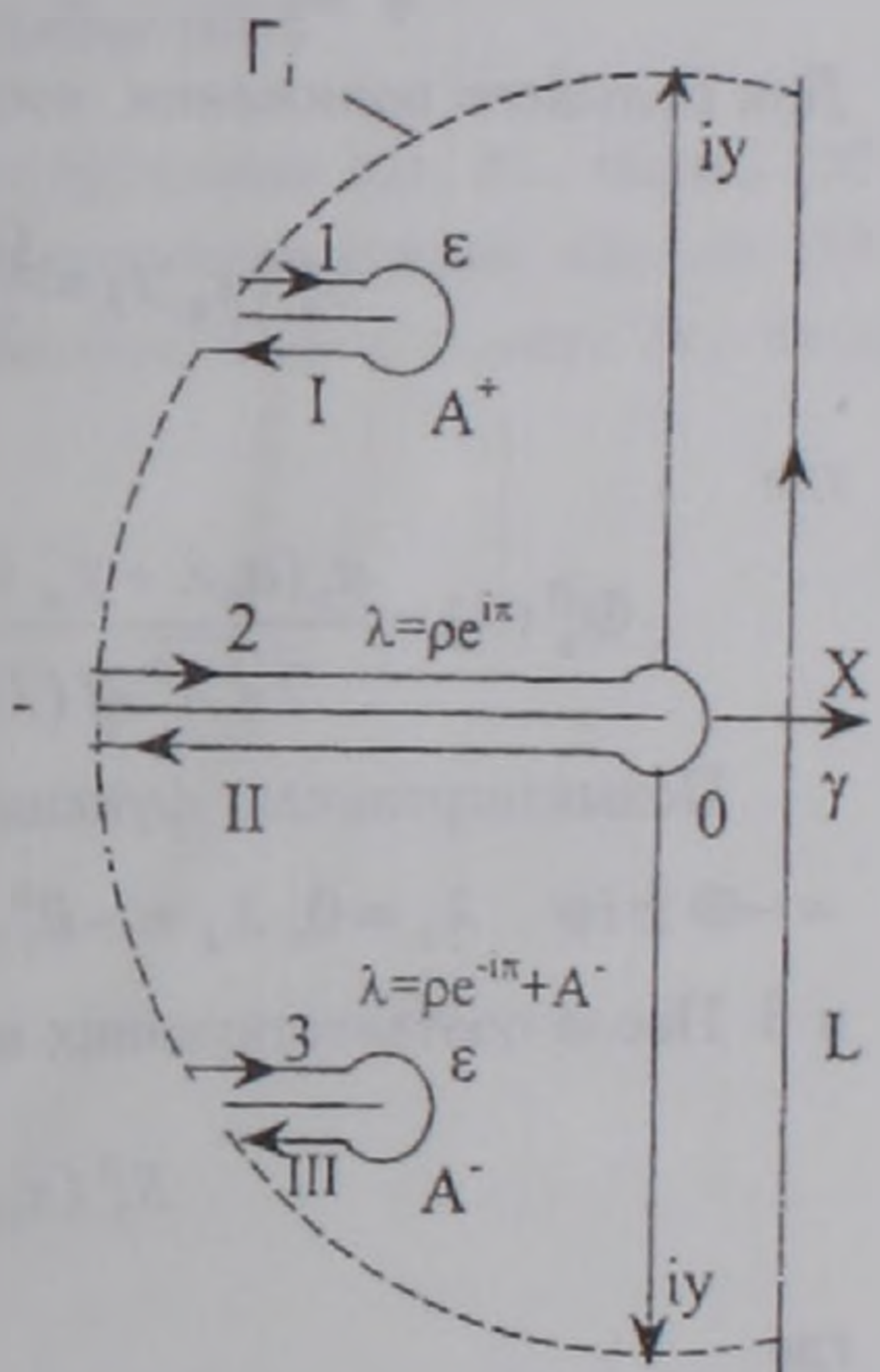

Рис.3.

После некоторых выкладок искомые контурные интегралы приводятся к вещественным определенным интегралам. Затем с использованием теоремы о свертке вычисляются все интегралы в (9). Расчетные формулы при этом получаются в виде

$$S_i^H(x,t)=\frac{Q_{sum}^H}{2\pi T_2}M^H\left[R_{i1}^H(x,t)+R_{i2}^H(x,t)\right], \tag{11}$$

где $M^H = A^0 \sqrt{\dfrac{a_1}{b_1 L^2}}$;

$$R_{11}^H = \int_{B_1^0}^{\infty} \frac{(e^{-\rho\tau}-1)}{\rho\sqrt{\rho - B_1^0}\,\rho_1} \cos\left(\sqrt{A^0}\,\bar{x}\sqrt{\rho - B_1^0}\right) d\rho;$$

$$R_{12}^H = -\sqrt{A^0}\int_0^{\infty} \frac{(e^{-\rho\tau}-1)}{\rho\sqrt{\rho}\,\rho_1} \cos\left(\bar{x}\sqrt{\rho}\right) d\rho;\ \ \rho_1 = \sqrt{a_0\rho(a_0\rho - 2\gamma_0^-) + \gamma_0^2};$$

$$R_{21}^H = -\frac{1}{2A^0}\int_{B_1^0}^{\infty} \frac{(e^{-\rho\tau}-1)}{\rho\sqrt{\rho - B_1^0}\,\rho_1}(\gamma_0^- - a_0\rho - \rho_1)\cos\left(\sqrt{A^0}\,\bar{x}\sqrt{\rho - B_1^0}\right) d\rho;$$

$$R_{22}^H = \frac{-\sqrt{A^0}}{2A^0}\int_0^{\infty} \frac{(e^{-\rho\tau}-1)}{\rho\sqrt{\rho}\,\rho_1}(\gamma_0^- - a_0\rho + \rho_1)\cos\left(\bar{x}\sqrt{\rho}\right) d\rho;$$

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{b_1 x^2}{a_2}};\ \tau = b_1 t;\ B_1^0 = 1 + B^0;\ \Phi = \frac{\gamma_0^-}{a_0};\ \psi = \frac{2\sqrt{A^0 B^0}}{a_0}. \qquad (12)$$

Для большого понижения, когда $x \to x_0 \to 0$, из (9) получим

$$S_2^H(x_0, t) = \frac{Q_{sum}^H}{2T_2}\sqrt{\frac{2a_2}{b_1 L^2}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda\tau}\Phi_0^H(\lambda)d\lambda, \qquad (13)$$

где

$$\Phi_0^H(\lambda) = \frac{a_0(a_0\lambda + \gamma_0^- + f(\lambda))e^{\omega_1 x_0}}{2\sqrt{A^0}\,\lambda f(\lambda)\sqrt{\lambda + B^0}} - \frac{a_0(a_0\lambda + \gamma_0^- - f(\lambda))e^{\omega_2 x_0}}{2\lambda f(\lambda)\sqrt{\lambda}}. \qquad (14)$$

Подынтегральная функция (14) имеет разветвления в точках $\lambda_{1,2} = -\Phi \pm i\psi$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -B_1^0$. Контуры интегрирования изображены на рис.2 и 3. После соответствующих вычислений (13) представляется в виде

$$S_2^H(x_0, t) = \frac{Q_{sum}^H}{2T_2} M^H R^H(x_0, t), \qquad (15)$$

где

$$R_i^H(x_0,t) = \frac{1}{A^0}\left[\int_{B_1^0}^{\infty} \frac{(e^{-\rho\tau}-1)(\gamma_0^- - a_0\rho - \rho_1)\cos\left(\sqrt{A^0}\,\bar{x}\sqrt{\rho - B_1^0}\right)}{\rho\rho_1\sqrt{\rho - B_1^0}} d\rho - \right.$$

$$\left. -\sqrt{A^0}\int_0^{\infty} \frac{(e^{-\rho\tau}-1)(\gamma_0^- - a_0\rho + \rho_1)}{\rho\sqrt{\rho}\,\rho_1}\cos\left(\bar{x}_0\sqrt{\rho}\right)d\rho\right],$$

$$\bar{x}_0 = \sqrt{\frac{x_0^2 b_1}{a_2}}. \qquad (16)$$

Интегральные функции $R_i^H(x,t)$ и $R_i^H(x_0,t)$ табулированы для разных значений безразмерных комплексов, которые выражаются через гидрогеологические параметры пластов.

Армянская сельскохозяйственная академия

Ս. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ներքին ջրատար շերտից ջրհանման դեպքում բազմաշերտ ֆիլտրացիոն միջավայրի հորատանցքերի գծային շարքի հաշվարկը

Դիտարկվում է հիդրավլիկական կապի մեջ գտնվող երկու անսահմանափակ ճնշումային ջրային հողաշերտերում ճնշումների որոշման խնդիրը, ներքին ջրատար շերտից հորատանցքերի գծային շարքի օգնությամբ հաստատուն գումարային ելքով ջրհանման դեպքում:

Հավասարումների համակարգը լուծվել է օպերացիոն հաշվի մեթոդով, առաջին անգամ ստացվել է հաշվային (11) բանաձևերը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *П.Я.Полубаринова-Кочина*, Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977.
2 *С.М.Казарян*, Водный обмен на фоне вертикального дренажа, Ереван, Айастан, 1988
3 *А.Анго*, Математика для электро- и радиоинженеров. Пер. с франц., М., Наука, 1964.