ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №4

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:534.1

С. А. Мелкумян

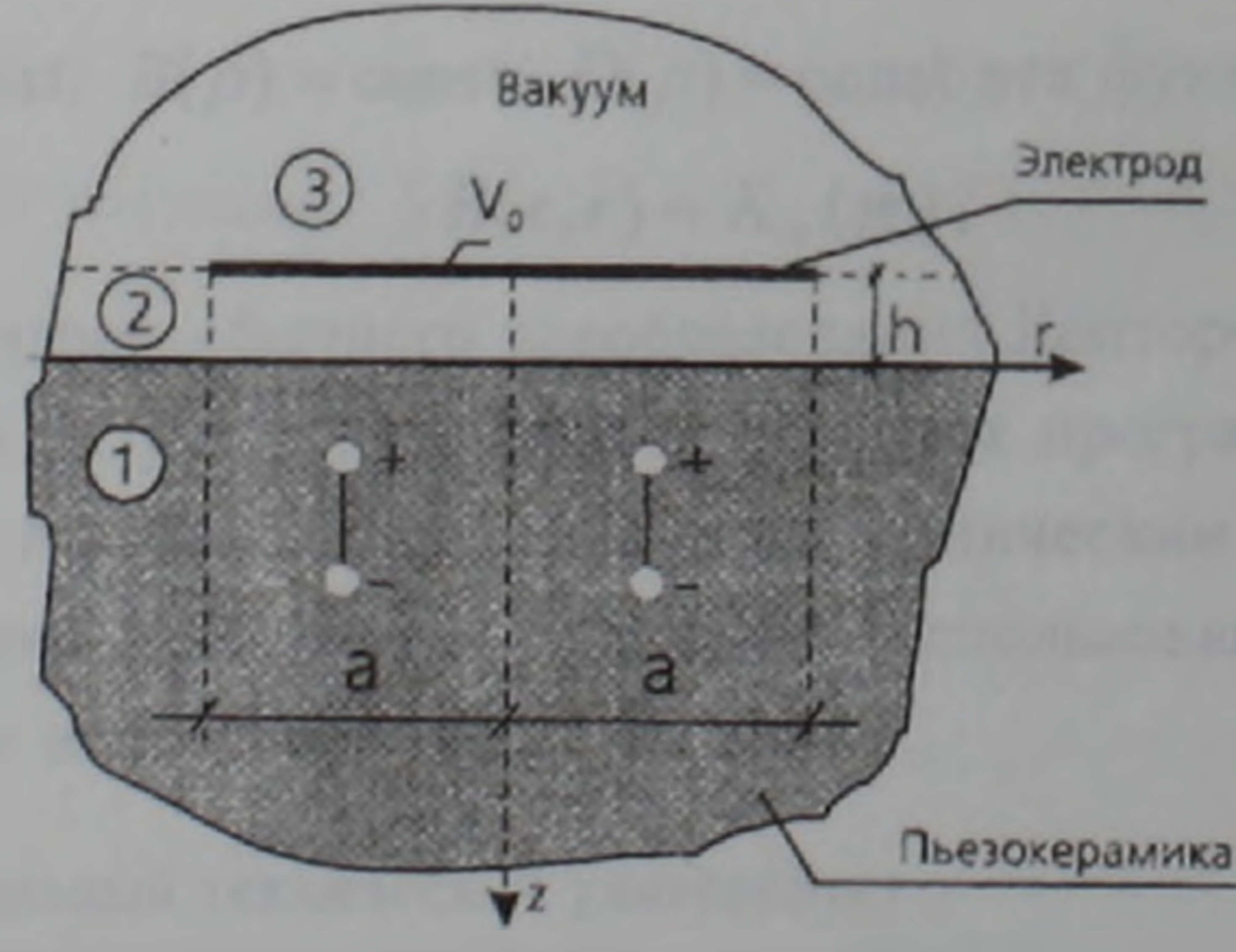
Осесимметричная индукционная задача электроупругости для пьезокерамического полупространства

(Представлено академиком НАН Армении Г.Е.Багдасарянои 8/IV 1998)

В теории пьезоэлектрических преобразователей энергии важное значение имеет анализ взаимодействия поверхностных электродов с пьезоэлектрическим материалом ([1]). Эта проблема станет еще актуальней, если между пьезоэлектриком и заряженным электродом есть зазор. Такие так называемые индукционные задачи электроупругости имеют особый практический и научный интерес.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная индукционная задача электроупругости для пьезоэлектрического полупространства ($z \geq 0$, $r \geq 0$).

Пусть в вакууме на конечном расстоянии (h) от пьезокерамики приложен заряженный тонкий, гибкий, круглый ($0 \leq r \leq a$) электрод (рисунок). Предполагается, что направление предварительной поляризации пьезокерамики перпендикулярно к границе полупространства ($z = 0$) и совпадает с положительным направлением оси oz. Для простоты принимается также, что на границе полупространства отсутствуют внешние механические напряжения воздействия.



Решение задачи в области пьезокерамики (область 1, $z \geq 0$, $r \geq 0$), затухающее в глубь полупространства, ищем в виде интегралов Ханкеля [2]:

$$U_r(r,z) = \frac{1}{C_{11}^E}\int_0^\infty \lambda \overline{U}(\lambda,z)J_1(\lambda,r)d\lambda,\ U_z(r,z) = \frac{1}{C_{44}^E}\int_0^\infty \lambda \overline{W}(\lambda,z)J_0(\lambda,r)d\lambda,$$
$$\Psi^{(1)}(r,z) = -\frac{1}{e_{15}}\int_0^\infty \lambda \overline{\Psi}^{(1)}(\lambda,z)J_0(\lambda,r)d\lambda, \quad (z \geq 0,\ r \geq 0), \tag{1}$$

где $J_\nu(\lambda,r)$ – функции Бесселя первого рода от действительного аргумента,

$$\overline{U}(\lambda,z) = \sum_{k=1}^{3}\Delta_1(t_k)t_k A_k(\lambda)e^{-\lambda t_k z},\ \overline{W}(\lambda,z) = \sum_{k=1}^{3}\Delta_2(t_k)A_k(\lambda)e^{-\lambda t_k z},$$
$$\Psi^{(1)}(\lambda,z) = \sum_{k=1}^{3}\Delta_3(t_k)A_k(\lambda)e^{-\lambda t_k z}. \tag{2}$$

Определение t_k и $\Delta_p(t_k)$ $(p = 1,2,3)$ дано в работе [2]. Для областей 2 $(h \leq z \leq 0,\ r \geq 0)$ и 3 $(-\infty \leq z \leq -h,\ r \geq 0)$ решение задачи ищем соответственно в виде:

$$\Psi^{(2)}(r,z) = -\frac{1}{e_{15}}\int_0^\infty \lambda[B(\lambda)ch(\lambda,z) - C(\lambda)sh(\lambda,z)]J_0(\lambda,r)d\lambda, \tag{3}$$

$$\Psi^{(3)}(r,z) = -\frac{1}{e_{15}}\int_0^\infty \lambda D(\lambda)e^{\lambda(h+z)}J_0(\lambda,r)d\lambda, \tag{4}$$

В (1)-(4) $U_r(r,z), U_z(r,z)$ – упругие перемещения, $\Psi^{(i)}(r,z)$, $(i = 1,2,3)$ – электростатический потенциал, а $A_k(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ – произвольные функции интегрирования, которые необходимо определить из граничных условий задачи [3]:

$$\tau_{rz}(r,0) = 0,\ \sigma_z(r,0) = 0,\ \Psi^{(1)}(r,0) = \Psi^{(2)}(r,0),\ D_z^{(1)}(r,0) = D_z^{(2)}(r,0)\ (0 < r < \infty),$$
$$\Psi^{(2)}(r,-h) = \Psi^{(3)}(r,-h) \quad (0 < r < \infty), \tag{5}$$
$$\Psi^{(2)}(r,-h) = V_0\ (0 \leq r \leq a),\ D_z^{(2)}(r,-h) = D_z^{(3)}(r,-h) \quad (a < r < \infty).$$

Используя основные соотношения электроупругости [3], электричества [4] и учитывая (1)-(4), можно все компоненты электроупругого и электрического поля выразить через $A_k(\lambda)$, $B_k(\lambda)$, $C_k(\lambda)$ и $D_k(\lambda)$. Удовлетворяя граничным условиям (5), получаем следующие соотношения:

$$A_k(\lambda) = C_k A_1(\lambda),\ B(\lambda) = m_1 A_1(\lambda),\ C(\lambda) = m_2 A_1(\lambda),$$
$$D(\lambda) = [m_1 ch(\lambda h) + m_2 sh(\lambda h)]A_1(\lambda) \tag{6}$$

и "парное" интегральное уравнение

$$\begin{cases} \int_0^\infty [1 + q(\lambda)]A_1^*(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda = q_0,\ (0 \leq r \leq a) \\ \int_0^\infty \lambda A_1^*(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda = 0,\ (a < r < \infty) \end{cases} \tag{7}$$

где

$$A_1^*(\lambda) = \lambda e^{\lambda h} A_1(\lambda) \tag{8}$$

$$q(\lambda) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} e^{-2\lambda h}; \quad q_0 = -\frac{2e_{15}V_0}{m_1 + m_2}, \tag{9}$$

а C_k, m_1, m_2 выражается через t_k, $\Delta_p(t_k)$ и физикомеханические постоянные материала. Решение поставленной задачи сведено к решению "парного" интегрированного уравнения (7).

Для решения (7) введем неизвестную функцию $\varphi(t)$ по формуле

$$A_1^*(\lambda) = \int_0^a \varphi(t)\cos\lambda t dt = \frac{\varphi(a)\sin\lambda a}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^a \varphi'(t)\sin\lambda t dt\ldots \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7) и используя значения интегралов Сонина ([5]):

$$\begin{gathered} \int_0^\infty J_0(\lambda, r)\sin\lambda t d\lambda = H_0(t-r)(t^2 - r^2)^{-1/2}, \\ \int_0^\infty J_0(\lambda, r)\cos\lambda t d\lambda = H_0(t-r)(r^2 - t^2)^{-1/2}, \end{gathered} \tag{11}$$

где $H_0(x)$ – функция Хевисайда, нетрудно убедиться, что второе уравнение (7) удовлетворяется тождественно, а первое уравнение сводится к виду:

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt + \int_0^a \varphi(t)dt \int_0^\infty q(\lambda) J_0(\lambda, r)\cos\lambda t d\lambda = q_0 \ (0 \le r \le a). \tag{12}$$

Обращая (12) по Абелю, получим

$$\varphi(t) + \int_0^a \varphi(x)K(t,x)dx = \frac{2q_0}{\pi}, \ (0 \le t \le a), \tag{13}$$

где

$$K(t,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q(\lambda)\cos\lambda x\cos\lambda t d\lambda, \tag{14}$$

которое в силу (8) можно представить в виде

$$K(t,x) = \frac{2h}{\pi}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\left[\frac{1}{4h^2 + (t-x)^2} + \frac{1}{4h^2 + (t+x)^2}\right]. \tag{15}$$

В частном случае, когда $h = 0$, из (9) $q(\lambda) = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \text{const}$, а из (14) $K(t,x) = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\delta(t - x)$, где $\delta(z)$ – функция Дирака.

Тогда из (13) и (9) получаем $\varphi(t) = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{e_{15}V_0}{m_1}$, а из (10) $A_1^*(\lambda) = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{e_{15}V_0}{m_1\lambda}\sin\lambda a$ и задача решается в замкнутом виде ([6]).

В общем случае $h \neq 0$ для сведения интегрального уравнения (13) к решению бесконечной системы алгебраических уравнений представим его решение в виде ряда по полиномам Лежандра с четными индексами [7,8]

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_{2n}\left(\frac{t}{a}\right) \quad (0 < t < a). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), после ряда преобразований для определения коэффициентов X_n получаем следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$X_n + \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} X_m = \frac{2q_0}{\pi}\delta_{0,n} \quad (n = 0,1,2\ldots), \tag{17}$$

где

$$C_{nm} = (-1)^{n+m}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(4n+1)\int_0^{\infty} e^{-\frac{2h\lambda}{a}} J_{\frac{1}{2}+2n}(\lambda) J_{\frac{1}{2}+2n}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{18}$$

При получении (17) и (18) были использованы значения следующих интегралов [5]:

$$\begin{gathered}\int_0^a P_{2n}\left(\frac{t}{a}\right)\cos\lambda t dt = (-1)^n\sqrt{\frac{\pi a}{2\lambda}} J_{\frac{1}{2}+2n}(a\lambda),\\ \int_0^a P_{2n}\left(\frac{t}{a}\right)P_{2m}\left(\frac{t}{a}\right)dt = \frac{a\delta_{n,m}}{4n+1} \quad (n,m = 0,1,2),\end{gathered} \tag{19}$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера, $P_k(x)$ – полином Лежандра.

Коэффициенты C_{nm} выражаются интегралами, содержащими функции Бесселя первого рода. Пользуясь асимптотическими формулами функций Бесселя при больших значениях индексов, легко доказать, что имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left|C_{nm}\right| = 0$ [7,8], следовательно, система (17) всегда квази-вполне регулярна. Свободные члены системы (17) равны нулю, кроме первого, следовательно, система (17) имеет единственное решение, которое можно определить либо методом последовательных приближений, либо же методом редукции.

После решения уравнений (17) можно определить все искомые функции по формулам (16), (10), (8) и (6). Используя (1)-(4) и основные соотношения электроупругости [3], электричества [4], можно определить все компоненты электроупругости электрического поля в любой точке пространства. Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность А.Ф.Улитко за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Էլեկտրաառաձգականության առանցքահամաչափելի ինդուկցիոն խնդիրը պիեզակերամիկական տարածության համար

Աշխատանքում դիտարկվում է էլեկտրաառաձգականության տեսության առանցքահամաչափելի ինդուկցիոն խնդիրը պիեզակերամիկական կիսատարածության համար, երբ վակուումում պիեզակերամիկայից վերջավոր h հեռավորության վրա տեղադրված է բարակ, ճկուն, շրջանային տեսքով լիցքավորված էլեկտրոդ: Ենթադրվում է, որ պիեզակերամիկայի նախնական բևեռացման ուղղությունը ուղղահայաց է կիսատարածության եզրին: Պարզության համար ընդունված է նաև, որ կիսատարածության եզրը ազատ է արտաքին մեխանիկական ազդեցություններից: Որպես հիմնական անհայտներ ընդունված են մեխանիկական տեղափոխման բաղադրիչները և էլեկտրաստատիկ պոտենցիալները: Խնդրի լուծումը փնտրված է Հանկելի ինտեգրալների տեսքով: Անհայտ ֆունկցիաների որոշումը բերվել է զույգ ինտեգրալ հավասարումների լուծման, որն, իր հերթին, բերվել է քվազի-լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի լուծման: Հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծումից հետո հեշտությամբ որոշվում են փոխկապակցված էլեկտրաառաձգական դաշտի բոլոր բաղադրիչները պիեզակերամիկական կիսատարածության ցանկացած կետում:

Մասնավոր դեպքում, երբ էլեկտրոդը գտնվում է կիսատարածության վրա (h=0), *խնդրի լուծումը ստացվում է ճշգրիտ:*

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

[1] *В.З.Партон, Б.А.Кудрявцев*, Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел, М., Наука, 1988. [2] *С.А.Мелкумян, А.Ф.Улитко*, Прикладная механика. т.22, №9, с.44-51 (1987). [3] *В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, Н.А.Шульга*, Электроупругость, Киев, Наукова Думка, с.276 (1989). [4] *И.Е.Тамм*, Основы теории электричества, М., Наука, (1976). [5] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1971. [6] *С.А.Мелкумян*, В кн.: Инженерные проблемы строительной механики, Ереван, с.39-48 (1985). [7] *В.М.Александров, С.М.Мхитарян*, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, М., Наука, 1983. [8] *А.А.Баблоян, В.С.Макарян*, Изв. НАН Армении. Механика, т.49, №2, с.8-18 (1996).