ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В.С. Тоноян, С.А. Мелкумян, А.Ж. Григорян

Несимметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости, ослабленной вертикальными соосными конечным и полубесконечным разрезами

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 9/IV 1998)

В работе рассматривается плоская контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости $(z \geq 0;\ |x| < \infty)$, ослабленной вертикальными соосными конечным $(0 < z < a)$ и внутренним полубесконечным $(b < z < \infty)$ разрезами, когда на полуплоскости $(z = 0)$ действует жесткий штамп $(-a_2 \leq x \leq a_1)$ с основанием произвольной гладкой формы, расположенный несимметрично относительно оси разрезов. Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. На горизонтальной границе вне штампа и на кромках разреза действует нормальное давление.

Решение задачи представлено как сумма решений смешанных задач для двух квадрантов, разделенных осью разреза ($i = 1$ – для правого квадранта, $i = 2$ – для левого квадранта). Задача решается методом Фурье в перемещениях. Решение представлено в виде сумм интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} U_x^{(i)}(x,z) &= \frac{(-1)^{i+1}}{C_{11}}\int_0^\infty \alpha \overline{U}^{(i)}(\alpha,z)\cos\alpha x\,d\alpha + \frac{(-1)^{i+1}}{C_{11}}\int_0^\infty \beta \overline{U}^{(i)}(\beta,x)\cos\beta z\,d\beta; \\ U_z^{(i)}(x,z) &= \frac{(-1)^{i}}{C_{44}}\int_0^\infty \alpha \overline{W}^{(i)}(\alpha,z)\sin\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{C_{44}}\int_0^\infty \beta \overline{W}^{(i)}(\beta,x)\sin\beta z\,d\beta; \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{Bmatrix} \overline{U}^{(1)}(\alpha,z) \\ \overline{U}^{(2)}(\alpha,z) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2} \Delta_1(t_j) \begin{Bmatrix} A_j(\alpha) \\ B_j(\alpha) \end{Bmatrix} e^{-\alpha t_j z};$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{U}^{(1)}(\beta,x) \\ \overline{U}^{(2)}(\beta,x) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} \begin{Bmatrix} C_k(\beta) \\ D_k(\beta) \end{Bmatrix} e^{(-1)^i \frac{\beta}{t_k} x};$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{W}^{(1)}(\alpha,z) \\ \overline{W}^{(2)}(\alpha,z) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2}\Delta_2(t_j)\begin{Bmatrix} A_j(\alpha) \\ B_j(\alpha) \end{Bmatrix} e^{-\alpha t_j z};$$
$$\begin{Bmatrix} \overline{W}^{(1)}(\beta,x) \\ \overline{W}^{(2)}(\beta,x) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2}\Delta_2(t_k)\begin{Bmatrix} C_k(\beta) \\ D_k(\beta) \end{Bmatrix} e^{(-1)^j \frac{\beta}{t_k} x}; \tag{2}$$

$$\Delta_1(t_j) = \left(\frac{C_{13}}{C_{44}}+1\right)t_j, \quad \Delta_2(t_j) = 1-\frac{C_{44}}{C_{11}}t_j^2; \tag{3}$$

t_j определяются из следующего биквадратного уравнения:

$$\frac{C_{33}}{C_{11}}t^4 + \left(\frac{C_{13}C_{13}}{C_{44}C_{11}} + 2\frac{C_{13}}{C_{11}} - \frac{C_{33}}{C_{44}}\right)t^2 + 1 = 0.$$

Здесь $C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{44}$ – модули упругости ортотропного материала.

Неизвестные функции интегрирования $A_j(\alpha); B_j(\alpha), C_k(\beta); D_k(\beta)$ определяются, используя граничные условия и условия полного контакта квадрантов:

$$\begin{gathered}
U_z^{(1)}(x,0) = f_1(x);\ 0 \le x \le a_1;\ U_z^{(2)}(x,0) = f_2(x);\ -a_2 \le x \le 0; \\
\sigma_z^{(1)}(x,0) = f_3(x);\ a_1 < x < \infty;\ \sigma_z^{(2)}(x,0) = f_4(x);\ -\infty < x < -a_2; \\
\tau_{zx}^{(1)}(x,0) = 0;\ 0 < x < a_1;\ \tau_{zx}^{(2)}(x,0) = 0;\ -a_2 < x < 0; \\
\tau_{zx}^{(1)}(x,0) = f_5(x);\ a_1 < x < \infty;\ \tau_{zx}^{(2)}(x,0) = f_6(x);\ -\infty < x < -a_2; \\
\sigma_x^{(1)}(0,z) = f_7(z);\ 0 < z < a;\ \sigma_x^{(2)}(0,z) = f_7(z);\ 0 < z < a; \\
\tau_{xz}^{(1)}(0,z) = 0;\ 0 < z < a;\ \tau_{xz}^{(2)}(0,z) = 0;\ 0 < z < a; \\
\sigma_x^{(1)}(0,z) = \sigma_x^{(2)}(0,z);\ \tau_{xz}^{(1)}(0,z) = \tau_{xz}^{(2)}(0,z);\ a < z < b; \\
U_x^{(1)}(0,z) = U_x^{(2)}(0,z);\ U_z^{(1)}(0,z) = U_z^{(2)}(0,z);\ a \le z \le b; \\
\sigma_x^{(1)}(0,z) = 0;\ b < z < \infty;\ \sigma_x^{(2)}(0,z) = 0;\ b < z < \infty; \\
\tau_{zx}^{(1)}(0,z) = 0;\ b < z < \infty;\ \tau^{(2)}(0,z) = 0;\ b < z < \infty.
\end{gathered} \tag{4}$$

Пользуясь основными соотношениями теории упругости ([1]) и из (1), (2), можно все компоненты упругого поля выразить через неизвестные функции интегрирования. Удовлетворяя условиям (4), получены:

$$A_j(\alpha) = a_j A_1(\alpha) + d_j \Psi_5(\alpha);\ B_j(\alpha) = a_j B_1(\alpha) + d_j \Psi_6(\alpha); \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{2} b_{3k}[C_k(\beta) - D_k(\beta)] = 0;\ \sum_{k=1}^{2} b_{1k}[C_k(\beta) + D_k(\beta)] = -\Phi(\beta); \tag{6}$$

$$\Phi(\beta) = \frac{2}{\pi\beta}\sum_{j=1}^{2} a_{1j}a_j \int_0^\infty \frac{\alpha^2[A_1(\alpha)+B_1(\alpha)]}{\beta^2+\alpha^2 t_j^2}d\alpha + \frac{2}{\pi\beta}\Psi^*(\beta); \tag{7}$$

$$\begin{cases}\int\limits_0^\infty \alpha A_1(\alpha)\sin\alpha x d\alpha = -\dfrac{C_{44}}{c_1} f_1(x) - \dfrac{c_2}{c_1}\Psi_5^*(x);\ 0 \le x \le a_1 \\ \int\limits_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\sin\alpha x d\alpha = \sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{b_{2k}}{c_3}\int\limits_0^\infty \beta^2 C_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k}x} d\beta - \dfrac{1}{c_3}[f_3(x) + \Psi_5^{**}(x)];\ a_1 < x < \infty\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}\int\limits_0^\infty \alpha B_1(\alpha)\sin\alpha x d\alpha = -\dfrac{C_{44}}{c_1} f_2(-x) - \dfrac{c_2}{c_1}\Psi_6^*(x);\ 0 \le x \le a_2 \\ \int\limits_0^\infty \alpha^2 B_1(\alpha)\sin\alpha x d\alpha = \sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{b_{2k}}{c_3}\int\limits_0^\infty \beta^2 D_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k}x} d\beta - \dfrac{1}{c_3}[f_4(-x) + \Psi_6^{**}(x)];\ a_2 < x < \infty\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \beta^2 C^*(\beta)\cos\beta z d\beta = f_7(z);\ 0 < z < a \\ &\int\limits_0^\infty \beta C^*(\beta)\cos\beta z d\beta = \Phi_1(z);\ a \le z \le b \\ &\int\limits_0^\infty \beta^2 C^*(\beta)\cos\beta z d\beta = 0;\ b < z < \infty\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \beta^2 D^*(\beta)\sin\beta z d\beta = \Phi_2(z);\ 0 < z < a \\ &\int\limits_0^\infty \beta D^*(\beta)\sin\beta z d\beta = \Phi_3(z);\ a \le z \le b \\ &\int\limits_0^\infty \beta^2 D^*(\beta)\sin\beta z d\beta = 0;\ b < z < \infty\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}C^*(\beta) &= \sum_{k=1}^{2} b_{3k} C_k(\beta); \\ D^*(\beta) &= \sum_{k=1}^{2} b_{1k} D_k(\beta) + \Phi^*(\beta);\end{aligned} \tag{12}$$

$\Phi_i(z)$ и $\Phi^*(\beta)$ выражены через $A_1(\alpha)$; $B_1(\alpha)$ и известными функциями.

Подобные "парные" (8,9) и "тройные" (10,11) интегральные уравнения рассматривались в работах ([2-7]).

Используя результаты работ ([2-4]), из (8) и (9) получим ([8]).

$$\begin{aligned}\alpha A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}\Bigg\{&\int\limits_0^{a_1}[\varphi_1(r) - \varphi_5^*(r)]J_0(\alpha r)dr + \int\limits_{a_1}^\infty r[\varphi_3(r) + \\ &+\varphi_5^{**}(r)]J_0(\alpha r)dr + \int\limits_{a_1}^\infty rF_1(r)J_0(\alpha r)dr\Bigg\};\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\alpha B_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}\Bigg\{&\int\limits_0^{a_2}[\varphi_2(r) - \varphi_6^*(r)]J_0(\alpha r)dr + \int\limits_{a_2}^\infty r[\varphi_4(r) + \\ &+\varphi_6^{**}(r)]J_0(\alpha r)dr + \int\limits_{a_2}^\infty rF_2(r)J_0(\alpha r)dr\Bigg\};\end{aligned} \tag{14}$$

где введены следующие обозначения:

$$F_1(r) = \sum_{k=1}^{2}\frac{b_{2k}}{c_3}\int\limits_0^\infty \beta^2 C_k(\beta) K_0\left(\frac{\beta r_r}{t_k}\right) d\beta;$$

$$F_2(r)=\sum_{k=1}^{2}\frac{b_{2k}}{c_3}\int_0^\infty \beta^2 D_k(\beta)K_0\left(\frac{\beta r_r}{t_k}\right)d\beta; \qquad (15)$$

$J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода с действительным аргументом; $K_\nu(z)$ – функция Макдонольда;

Ψ_i; Ψ_i^*; Ψ_i^{**}; φ_i; φ_i^*; φ_i^{**} выражаются через известные функции.

Следуя ([5-7]), в (10) и (11) $C^*(\beta)$: $D^*(\beta)$ ищем соответственно в виде

$$C^*(\beta)=\frac{1}{\beta^2}\sum_{m=1}^{\infty}C_m J_{2m}(b\beta); \qquad (16)$$

$$D^*(\beta)=\frac{1}{\beta^2}\sum_{n=0}^{\infty}D_n J_{2n+1}(b\beta). \qquad (17)$$

В этом случае, соответственно в (10) и (11), третье уравнение приводится в тождество, а первое и второе – в систему уравнений "парных" рядов ([8]):

$$\begin{cases}\sum\limits_{m=1}^{\infty}C_m\cos\left[2m\arcsin\dfrac{z}{b}\right]=f_7(z)\sqrt{b^2-z^2}\,; & 0<z<a\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{C_m}{2m}\cos\left[2m\arcsin\dfrac{z}{b}\right]=\Phi_1(z); & a\le z\le b\end{cases} \qquad (18)$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}D_n\sin\left[2m\arcsin\dfrac{z}{b}\right]=\Phi_2(z)\sqrt{b^2-z^2}\,; & 0<z<a\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{D_n}{2n+1}\sin\left[(2n+1)\arcsin\dfrac{z}{b}\right]=\Phi_3(z); & a\le z\le b\end{cases} \qquad (19)$$

Используя результаты работ ([5-7]) и обозначая, соответственно, в (18) и (19) $z=b\sin\dfrac{\theta}{2}$ и $z=\cos\dfrac{\tau}{2}$, после некоторых преобразований получим ([8])

$$C_m=\frac{m}{2}\int_0^\pi F_3(\varphi)\left\{P_{m-1}(\cos\varphi)+P_m(\cos\varphi)\right\}tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi;. \qquad (20)$$

$$D_n=-\frac{(-1)^n(2n+1)^2}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\pi F_4(t)P_n(\cos t)\sin t dt. \qquad (21)$$

Здесь

$$F_3(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}b\int\limits_0^\varphi\dfrac{f_7\left(b\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}d\theta; & 0<\varphi<\lambda\\ -\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_\varphi^\pi\dfrac{\Phi_1'\left(b\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}d\theta; & \lambda<\varphi<\pi\end{cases} \qquad (22)$$

$$
F_4(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t \frac{\Phi_3\left(b\cos\frac{\tau}{2}\right)}{\sqrt{\cos\tau-\cos t}}d\tau; & 0<t<\mu\\ \displaystyle\int_t^\pi \frac{G\left(b\cos\frac{\tau}{2}\right)}{\sqrt{\cos\tau-\cos t}}d\tau; & \mu<t<\pi\end{cases} \tag{23}
$$

$$
G\left(b\cos\frac{\tau}{2}\right)=S^*-b\int_\tau^\pi \Phi_2\left(b\cos\frac{\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau; \tag{24}
$$

$$
S^*=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{2n+1}; \tag{25}
$$

$P_m(\cos\varphi)$ и $P_n(\cos t)$ – полиномы Лежандра.

Подставляя (20) в формулу (25) и решая относительно S^*, можно найти его значение.

Имея в виду (12, 15-17, 20, 21), исключая $C_k(\beta)$ и $D_k(\beta)$ из (13), (14), для определения $A_1^*(Y)$ и $B_1^*(Y)$ получена система интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода:

$$
\begin{aligned}
A_1^*(Y)&=\Omega_1(Y)+\int_0^\infty K_1(Y,\alpha)A_1^*(\alpha)d\alpha+\int_0^\infty K_2(Y,\alpha)B_1^*(\alpha)d\alpha;\\
B_1^*(Y)&=\Omega_2(Y)+\int_0^\infty K_3(Y,\alpha)A_1^*(\alpha)d\alpha+\int_0^\infty K_4(Y,\alpha)B_1^*(\alpha)d\alpha,
\end{aligned} \tag{26}
$$

где

$$
A_1^*(\alpha)=\alpha A_1(\alpha);\quad B_1^*(\alpha)=\alpha B_1(\alpha). \tag{27}
$$

Из-за объемности $\Omega_i(Y)$ и $K_i(Y,\alpha)$, их выражения в настоящей статье не представляются. Систему (26) можно решить методом последовательных приближений, при условии, что для ядер системы интегральных уравнений выполняются оценки:

$$
\int_0^\infty K_1(Y,\alpha)d\alpha+\int_0^\infty K_2(Y,\alpha)d\alpha<1;
$$

$$
\int_0^\infty K_3(Y,\alpha)d\alpha+\int_0^\infty K_4(Y,\alpha)d\alpha<1,
$$

а функции $\Omega_1(Y)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $Y\to\infty$.

После этого, решая систему (26), методом последовательных приближений определяются $A_1^*(Y)$ и $B_1^*(Y)$. По формулам (5-7, 12, 15-17), (20-25) последовательно можно определить все искомые функции.

Далее, используя основные соотношения теории упругости ([1]), можно определить все компоненты упругого поля в любой точке полуплоскости.

Институт механики НАН Армении
Ереванский архитектурно-строительный институт

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ, Ա. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ուղղահայաց համառանցք վերջավոր և կիսաանվերջ ճեղքերով թուլացված օրթոտրոպ առաձգական կիսահարթության համար ոչ համաչափ կոնտակտային խնդիր

Աշխատանքում դիտարկված է ուղղահայաց համառանցք վերջավոր և ներքին կիսաանվերջ ճեղքերով թուլացված օրթոտրոպ կիսահարթության համար հարթ կոնտակտային խնդիր, երբ կիսահարթության եզրի վրա կիրառված է ճեղքերի առանցքի նկատմամբ ոչ համաչափ դասավորված կամայական հիմքով կոշտ դրոշմ: Հորիզոնական եզրի վրա դրոշմից դուրս և ճեղքերի ափերին ազդում են նորմալ ճնշում: Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է: Խնդիրը լուծված է տեղափոխումներով Ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը փնտրված է Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով: Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաների որոշումը սկզբում բերվել է զույգ և եռակի ինտեգրալ հավասարումների, իսկ հետագայում Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ռեգուլյար հավասարումների համակարգի լուծմանը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р.Крестенсен*, Введение в механику композитов, М., Мир, 1982. [2] *В.С.Тоноян*, Изв.АН АрмССР, Механика, т.21, №3, с.3-18 (1968). [3] *В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян*, Изв.АН АрмССР, т.24, №4, с.3-17 (1971). [4] *С.А.Мелкумян*, ДАН АрмССР, т.55, №2, с.87-93 (1972). [5] *В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян*, ДАН АрмССР, т.70, №5, с.282-288 (1973). [6] *А.А. Баблоян*, ДАН АрмССР, т.39, №3, с.149-157 (1964). [7] *А.А.Баблоян*, ПММ, т.31, №4, с.678-689 (1967). [8] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.