ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик НАН Армении **М. А. Задоян**

Задача концентрации напряжений при конечных деформациях

(Представлено 28/XI 1997)

Рассматривается задача концентрации напряжений в условиях плоской деформации на угловой точке клиновидного тела при конечных деформациях. Принимается, что материал несжимаемый и упрочняется по степенному закону

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m,$$

где ε_0 и σ_0 – интенсивности деформации и обобщенных напряжений, k и m – механические параметры материала, определяемые из эксперимента. До деформации приведем цилиндрическую систему координат $r\theta$: начало помещаем на вершине клина $r=0$ и $0 \le \theta \le \alpha$, где α угол раствора этого клина. Считаем, что окрестность рассматриваемой точки свободна от воздействий внешних сил.

Из трехмерных дифференциальных уравнений равновесия в криволинейных координатах, приведенных в [1], переходя к случаю плоской деформации, в цилиндрических координатах получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{s_r - s_\theta}{r} = 0, \\
&\frac{\partial s_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} + \frac{s_{r\theta} + s_{\theta r}}{r} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
&s_r = \sigma_r^*\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \sigma_{r\theta}^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\right), \\
&s_\theta = \sigma_\theta^*\frac{\partial v}{\partial r} + \sigma_\theta^*\left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \\
&s_{r\theta} = \sigma_r^*\frac{\partial v}{\partial r} + \sigma_{r\theta}^*\left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \\
&s_{\theta r} = \sigma_{\theta r}^*\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \sigma_\theta^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь σ^*_{ij} обобщенные напряжения, выражаемые через истинные напряжения σ_{ij} следующим образом:

$$\sigma^*_r = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon_\theta}{1+2\varepsilon_r}}\sigma_r\,,\quad \sigma^*_\theta = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_\theta}}\sigma_\theta\,,\ \sigma^*_{r\theta} = \sigma^*_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}\,.$$

Зависимости компонентов деформации через перемещения в условиях плоской деформации имеют следующую форму:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\right)^2\right], \tag{3}$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}\right).$$

Условие несжимаемости материала сводится к уравнению

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + 2\varepsilon_r\varepsilon_\theta - 2\varepsilon^2_{r\theta} = 0. \tag{4}$$

Соотношения между компонентами обобщенных напряжений и деформаций принимаем согласно деформационной теории Генки

$$\sigma^*_{ij} - \delta_{ij}\sigma^* = 2k\varepsilon_0^{m-1}\varepsilon_{ij}\,, \tag{5}$$

причем δ_{ij} символ Кронекера.

Перемещения ищем в виде

$$u = r^\lambda \psi(\theta,\lambda),\ \ v = r^\lambda f(\theta,\lambda), \tag{6}$$

где λ искомый параметр, а ψ и f неизвестные функции полярного угла θ и параметра λ.

Деформации согласно (3) и (6) будут

$$\varepsilon_r = r^{\lambda-1}(\lambda\psi + r^{\lambda-1}F_r),$$

$$\varepsilon_\theta = r^{\lambda-1}(f' + \psi + r^{\lambda-1}F_\theta), \tag{7}$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = r^{\lambda-1}(\psi' + (\lambda-1)f + r^{\lambda-1}F_{r\theta}),$$

где

$$F_r = \frac{\lambda^2}{2}(\psi^2 + f^2),\ \ F_\theta = \frac{1}{2}\left[(f' + \psi)^2 + (\psi' - f)^2\right], F_{r\theta} = \lambda(\psi\psi' + ff'). \tag{8}$$

Далее будем рассматривать случай $\lambda < 1$. Тогда из (7) находим

$$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij} r^{2(\lambda-1)} F_{ij}\,, \tag{9}$$

причем $\mu_{11} = \mu_{22} = 1$, а $\mu_{12} = 1/2$.

Из (4) следует уравнение

$$(\psi\psi' + ff')^2 - (\psi^2 + f^2)\left[(f' + \psi)^2 - (\psi' - f)^2\right] = 0. \tag{10}$$

Согласно (5) и (9) получаем

$$\sigma_r^* = \sigma_\theta^* + 2kr^{2(\lambda-1)m}(F_r - F_\theta)\chi,$$
$$\sigma_{r\theta}^* = kr^{2(\lambda-1)m}F_{r\theta}\chi, \tag{11}$$

где

$$\chi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m-1}\left(\sqrt{F_r^2 - F_rF_\theta + F_\theta^2 + 3/4F_{r\theta}^2}\right)^{m-1}. \tag{12}$$

Вводя обозначения

$$r^{\lambda-1}\sigma_\theta^*(r,\theta) = T(r,\theta) \tag{13}$$

и используя представления (6), соотношения (11), из (2) находим

$$s_r = \lambda\psi T + kr^{\nu-1}\left[2\lambda\psi(F_r - F_\theta) + (\psi' - f)F_{r\theta}\right]\chi,$$
$$s_\theta = (f \quad + \psi)T + \lambda kr^{\nu-1} fF_{r\theta}\chi, \; \nu = (\lambda-1)(2m+1)+1,$$
$$s_{r\theta} = \lambda fT + kr^{\nu-1}\left[2\lambda f(F_r - F_\theta) + (f' + \psi)F_{r\theta}\right]\chi,$$
$$s_{\theta r} = (\psi' - f)T + \lambda kr^{\nu-1}\psi F_{r\theta}\chi.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1), получаем

$$\lambda\psi\frac{\partial T}{\partial r} + (\psi' - f)\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} + \left[\psi'' - 2f' + (\lambda-1)\psi\right]\frac{1}{r}T + kr^{\nu-2}R_1 = 0,$$
$$\lambda f\frac{\partial T}{\partial r} + (f' + \psi)\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} + \left[f'' + 2\psi' + (\lambda-1)f\right]\frac{1}{r}T + kr^{\nu-2}R_2 = 0, \tag{14}$$

где

$$R_1 = \lambda\psi F_{r\theta}\chi' + [\lambda\psi F_{r\theta}' + (\lambda+\nu)(\psi' - f)F_{r\theta} + 2\lambda\nu\psi(F_r - F_\theta)]\chi,$$
$$R_2 = \lambda fF_{r\theta}\chi' + [\lambda fF_{r\theta}' + (\lambda+\nu)(f' + \psi)F_{r\theta} + 2\lambda\nu f(F_r - F_\theta)]\chi. \tag{15}$$

После исключения $\partial T/\partial r$ из (14) приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega T) + k(\lambda+\nu)r^{\nu-1}\Omega F_{r\theta}\chi = 0, \tag{16}$$

где $\Omega = \varphi^2 + f^2 + \psi' f - f'\psi$. Интегрируя и учитывая условие отсутствия нагрузки на крае $\theta = 0$, из (16) получаем,

$$T = k\frac{\omega}{\Omega}r^{\nu-1},$$

причем $\omega(\theta)$ – новая неизвестная функция

$$\omega = -(\lambda+\nu)\int_0^\theta F_{r\theta}\Omega\chi d\theta. \tag{17}$$

Далее, исключая $\partial T/\partial\theta$ из системы (14), находим

$$\lambda\Omega\frac{\partial T}{\partial r} + H\frac{T}{r} + \lambda\Omega\left[(F_{r\theta}\chi)' + 2\nu(F_r - F_\theta)\chi\right]kr^{\nu-2} = 0, \tag{18}$$

где

$$H=(f'+\psi)\psi''+(f-\psi')f''-2(\psi'^2+f'^2)+$$
$$+(\lambda-1)(\psi^2+f^2)+(\lambda-3)(\psi f'-f\psi'). \tag{19}$$

Подставляя (17) в уравнение (18), запишем уравнение

$$\lambda^2\Omega^2\left[F'_{r\theta}+2\nu(F_r-F_\theta)+F_{r\theta}\frac{\chi'}{\chi}\right]+\frac{\omega}{\chi}[H+\lambda(\nu-1)\Omega]=0. \tag{20}$$

Вычислением находим

$$\frac{\chi'}{\chi}=-(1-m)\left(aF'_r+bF'_\theta+cF'_{r\theta}\right), \tag{21}$$

где

$$a=\frac{1}{J}(F_r-\frac{1}{2}F_\theta),\quad b=\frac{1}{J}(F_\theta-\frac{1}{2}F_r),$$
$$c=\frac{3}{4}\frac{1}{J}F_{r\theta},\quad J=F_r^2-F_rF_\theta+F_\theta^2+\frac{3}{4}F_{r\theta}^2.$$

Подставляя выражения (8), (19) и (21) в (20) и вводя обозначения

$$\psi'=s,\quad f'=\tau \tag{22}$$

приходим к уравнению

$$A_1s'+B_1\tau'+C_1=0, \tag{23}$$

где

$$A_1=\lambda^2\Omega^2\left[\psi+(1-m)b(\psi s+f\tau)(f-s)\right]+\frac{\omega}{\chi}(\tau+\psi),$$
$$B_1=\lambda^2\Omega^2\left[f-(1-m)b(\psi s+f\tau)(\psi+\tau)\right]+\frac{\omega}{\chi}(f-\tau),$$
$$C_1=\lambda\Omega^2Q+\omega q,$$
$$q=\{[\lambda-3+\lambda(\nu-1)](\psi\tau-sf)-2(\tau^2+s^2)+\lambda\nu(f^2+\psi^2)\}\frac{1}{\chi},$$
$$Q=\nu(\lambda^2-1)(\psi^2+f^2)+(\lambda-\nu)(\tau^2+s^2)-2\nu(\psi\tau-sf)-$$
$$-\lambda(1-m)[(a\lambda^2+b)(\psi s+f\tau)^2+\lambda c(\psi s+f\tau)(s^2+\tau^2)],$$
$$F_{r\theta}=\lambda(s\psi+f\tau),\quad F_\theta=\frac{1}{2}[(\psi+\tau)^2+(s-f)^2].$$

Далее, дифференцируя (10) и учитывая обозначения (22), получим

$$A_2s'+B_2\tau'+C_2=0, \tag{24}$$

где

$$A_2=\psi(\psi s+f\tau)+\psi^2+f^2,\quad B_2=f(\psi s+f\tau)-\psi^2-f^2,$$
$$C_2=(\psi s+f\tau)[s^2+\tau^2-(\tau+\psi)^2+(s-f)^2]-(\psi^2+f^2)(s+\tau).$$

Из системы уравнений (23), (24) при условии $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ приходим к следующим дифференциальным уравнениям:

$$s' = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad \tau' = -\frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_2 B_2 - A_2 B_1}, \tag{25}$$

правые части которых содержат пять неизвестных функций ψ, f, s, τ, ω. Дифференцируя (17), находим

$$\omega' = -\lambda(\lambda + \nu)(\psi s + f\tau)\Omega\chi. \tag{26}$$

Уравнение (10) перепишется в виде

$$(\psi s + f\tau)^2 - (\psi^2 + f^2)[(\tau + \psi)^2 - (s - f)^2] = 0. \tag{27}$$

В окрестности краевой точки на гранях $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ отсутствуют нагрузки, тогда

$$\omega = 0; \quad \psi s + f\tau = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0; \quad \theta = \alpha, \tag{28}$$

кроме того из (17) имеем также условие

$$\int_0^\alpha (\psi s + f\tau)\Omega\chi d\theta = 0. \tag{29}$$

Таким образом, в окрестности угловой точки $r = 0$ мы пришли к системе однородных дифференциальных уравнений (22), (25), (26) и соотношению (27) относительно неизвестных функций ψ, f, s, τ, ω при однородных граничных условиях (28) и интегральным условиям (29). Численное решение этой задачи в принципе определяет λ в зависимости от α и m.

Для исследования прочности соединения составного клина система разрешающих уравнений и граничных условий сформулируется аналогично с добавлением условия сопряжения на контактной поверхности.

При малых деформациях задача исследования напряженного состояния в угловых точках клиновидных упрочняющихся тел приведена в ([2]).

Институт механики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս **Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ**

Լարումների կենտրոնացման խնդիրը վերջավոր դեֆորմացիաների ժամանակ

Հարթ դեֆորմացիաների պայմաններում ուսումնասիրվում է լարումների կենտրոնացումների խնդիրը սեպաձև մարմնի անկյունային կետում վերջավոր դեֆորմացիաների դեպքում: Ընդունվում է, որ նյութը անսեղմելի է և ենթարկվում է ամրապնդման աստիճանային օրենքին: Ենթադրվում է, որ քննարկվող կետի շրջակայքը ազատ է արտաքին ուժերի ազդեցությունից: Վերջին հաշվով հետազոտությունը հանգում է 4 սովորական առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներից կազմված համակարգի համար սեփական արժեքների խնդրի ուսումնասիրմանը՝ համապատասխան համասեռ եզրային պայմաններով:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

[1] *В.В.Новожилов*. Теория упругости, М.-Л., Судпромгиз, 1958. [2] *М.А.Задоян*. Пространственные задачи теории пластичности, М., Наука, 1992.