ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №4

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76

В. А. Мирзоян

# Конусы с многомерными образующими над эйнштейновыми пространствами

(Представлено академиком НАН Армении А.А.Талаляном 14/IV 1998)

Риманово пространство $M$ называется $Ric$-полусимметрическим, если его тензор Риччи $R_1$ удовлетворяет условию $R(X,Y)\cdot R_1=0$, где $R(X,Y)=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}$ – операторы кривизны римановой связности $\nabla$ на $M$.$Ric$-полусимметрические пространства являются естественными обобщениями полусимметрических ($R(X,Y)\cdot R=0$, $R$ – тензор кривизны), эйнштейновых и некоторых других классов римановых пространств. В [1] доказано, что классификация $Ric$-полусимметрических пространств сводится к классификации эйнштейновых и полуэйнштейновых пространств. Теория эйнштейновых пространств, характеризуемых условием $R_1=\lambda I$ ($\lambda=\mathrm{const}$), как известно, хорошо разработана [2,3]. Полуэйнштейновы пространства впервые были выделены в [4]. Их простейшими примерами служат конусы с одномерными образующими над пространствами постоянной кривизны и кэлеровы конусы [5]. Однако эти конусы удовлетворяют более сильному условию $R(X,Y)\cdot R=0$.

Цель настоящей работы – построить существенные примеры неприводимых полуэйнштейновых пространств, имеющих произвольный индекс дефектности. Эта задача была поставлена перед автором академиком А.Т.Фоменко в апреле 1997г.

Пусть $M$ – риманово пространство и $T_x$ – касательное пространство к $M$ в точке $x$. Подпространство $T_x^0=\{X\in T_x; R(X,Y)=0\,\forall Y\in T_x\}$ называется пространством дефектности в точке $x$, а его размерность – индексом дефектности в этой точке. Распределение $T^0$ инволютивно и вполне геодезично [6]. Для любого $X\in T_x^0$ имеем $R_1(X)=0$. Ортогональное дополнение $T_x^1$ к $T_x^0$ в $T_x$ инвариантно относительно операторов $R(X,Y)$ и тензора $R_1$. Риманово пространство $M$ с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если его тензор Риччи на каждом инвариантном подпространстве $T_x^1$

имеет только одно ненулевое собственное значение. Аналогично определяются псевдоримановы полуэйнштейновы пространства.

Пусть ${}^lR_k$ – псевдоевклидово пространство сигнатуры $(l,k)$ $(0\le l\le k)$ и с координатами $x^1,\dots,x^k$. Пусть $C_1,\dots,C_k$ – ненулевые постоянные, $C$ – произвольная постоянная и пусть неравенство $C_ix^i+C>0(i=1,\dots,k)$ определяет в ${}^lR_k$ некоторое полупространство ${}^lR_k^+$. Если $N-m$-мерное риманово пространство с метрикой $d\sigma^2(x^{k+1},\dots,x^n)(n=k+m)$, то многообразие ${}^lR_k^+\times N$, наделенное метрикой

$$ds^2=-\sum_{\alpha=1}^{l}(dx^\alpha)^2+\sum_{\alpha=l+1}^{k}(dx^\alpha)^2+(C_ix^i+C)^2d\sigma^2, \tag{1}$$

будем называть конусом с $k$-мерными образующими над $N$. При $l=0$ этот конус является римановым пространством, а при $l=k$ – псевдоримановым пространством сигнатуры $(l,n)$. Вершиной конуса является гиперплоскость в ${}^lR_k$, определяемая уравнением $C_ix^i+C=0$. Если в ${}^lR_k$ полупространство определить неравенством $C_ix^i+C<0$, то можем определить конус ${}^lR_k^-\times N$, изометричный конусу ${}^lR_k^+\times N$. При $l=0$, $k=1$ получаем известное определение конуса над римановым пространством ([3,5]).

Пусть ${}^lR_k$ и $N$, как и выше. Многообразие ${}^lR_k\times N$, наделенное метрикой

$$ds^2=-\sum_{\alpha=1}^{l}(dx^\alpha)^2+\sum_{\alpha=l+1}^{k}(dx^\alpha)^2+C^2d\sigma^2(x^{k+1},\dots,x^n),$$

где $C=\mathrm{const}(\neq0)$, является приводимым пространством и называется цилиндром с $k$-мерными образующими над $N$.

Теорема 1. *Пусть $G^1(x^1,\dots,x^k),\cdots,G^p(x^1,\dots,x^k)$ – положительные функции, определенные в области $U\subset{}^lR_k$, и пусть $N^1,\cdots,N^p$ – римановы пространства с метриками $d\sigma_1^2,\dots,d\sigma_p^2$ соответственно. Тогда на многообразии $U\times N^1\times\cdots\times N^p$, наделенном метрикой*

$$ds^2=-\sum_{\alpha=1}^{l}(dx^\alpha)^2+G^u d\sigma_u^2, \tag{2}$$

*где $0\le l\le k$, направления $\partial/\partial x^i$ в каждой точке принадлежат пространству дефектности в том и только в том случае, если $G^u=(C_i^ux^i+C^u)^2$ для любого $u=1,\dots,p$, т.е., если каждая проекция $U\times N^u$ произведения является либо конусом или цилиндром над $N^u$, либо цилиндром с $q_u$-мерными $(1\le q_u<k)$ образующими над конусом с $(k-q_u)$-мерными образующими над $N^u$.*

В теореме 1 многообразие $U\times N^1\times\cdots\times N^p$ с метрикой (2) является частным случаем полуприводимого пространства ([7]). Следуя ([3]) и ([8]), будем называть его скрещенным произведением многообразий $U,N^1,\cdots,N^p$ с базой $U$ и скрещивающими функциями $G^1,\dots,G^p$. Оно является некоторым расслоением с базой $U$ и слоями $N^1\times\dots\times N^p$.

Пусть $N$ является или двумерным или эйнштейновым пространством размерности $m$. Тогда его тензор Риччи $R_1^N$ пропорционален метрическому тензору $g^N$, т.е. $R_1^N=\lambda g^N$. Наделяя многообразие ${}^lR_k^+\times N$ метрикой (1) и вычисляя по стандартным формулам римановой геометрии (см.[9]) компоненты тензора Риччи, получим

$$R_{\alpha\beta}=R_{\alpha a}=R_{ab}=R_{ar}=R_{ar}=0,$$

$$R_{rs}=\left[\lambda+(1-m)\left(\sum_{a=l+1}^{k}C_a^2-\sum_{a=1}^{l}C_a^2\right)^2\right](C_ix^i+C)^{-2}g_{rs}, \qquad (3)$$

где $r,s=k+1,\dots,n$, а $g_{rs}$ – компоненты метрического тензора.

Анализ формулы (3) приводит к следующим теоремам.

Теорема 2. *Всякий конус ${}^lR_k^+\times N\,(0<l<k)$ над эйнштейновым пространством $N$ является либо 1) неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности $k$, либо 2) риччи-плоским пространством. Более того, выбором вершины конуса всегда можно добиться как случая 1), так и случая 2).*

Теорема 3. *Пусть $N$ – эйнштейново пространство с эйнштейновой константой $\lambda$. Если $\lambda\le 0$, то всякий конус ${}^0R_k^+\times N$ над $N$ является неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности $k$. Если $\lambda>0$, то всякий конус ${}^0R_k^+\times N$ является либо 1) неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности $k$, либо 2) риччи-плоским пространством. Более того, выбором вершины конуса всегда можно добиться как случая 1), так и случая 2).*

Теорема 4. *Пусть $N$ – эйнштейново пространство с эйнштейновой константой $\lambda$. Если $\lambda\ge 0$, то всякий конус ${}^kR_k^+\times N$ над $N$ является неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности $k$. Если $\lambda<0$, то всякий конус ${}^kR_k^+\times N$ является либо 1) неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности $k$, либо 2) риччи-плоским пространством. Более того, выбором вершины конуса всегда можно добиться как случая 1), так и случая 2).*

Теорема 5. *Пусть $N$ – двумерное риманово пространство непостоянной кривизны. Тогда всякий конус ${}^lR_k^+\times N$, $0\le l\le k$, над $N$ является (по крайней мере локально) неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности $k$.*

Описанный в теоремах 2-4 способ построения риччи-плоских конусов путем выбора вершины, допускает следующее обобщение, дающее метод построения риччи-плоских пространств над конечным семейством эйнштейновых пространств.

Теорема 6. *Пусть* $N^1,\cdots,N^k$ *– эйнштейновы пространства размерностей* $m_1,\ldots,m_k$ *с положительными эйнштейновыми константами* $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ *и метриками* $ds_1^2,\ldots,ds_k^2$ *соответственно. Пусть* $\left\|\widetilde{C}_v^u\right\|$ *– ортогональная матрица порядка* $k(u,v=1,..,k)$, *с вектор-строками* $\widetilde{C}^u=(\widetilde{C}_1^u,\ldots,\widetilde{C}_k^u)$, *а* $\left\|C_v^u\right\|$ *– квадратная матрица порядка* $k$ *с вектор-строками* $C^u=(C_1^u,\cdots,C_k^u)$, *определяемыми по формуле*

$$C^u=\sqrt{\frac{\lambda_u}{m_u-1}}\widetilde{C}^u.$$

*Пусть* $R_k$ *– евклидово пространство с декартовыми координатами* $x^1,\ldots,x^k$, *а* $U$ *– такая область в* $R_k$, *на которой при каждом* $u$ *либо* $C_v^u x^v+\overline{C}^u>0$, *либо* $C_v^u x^v+\overline{C}^u<0$, *где* $\overline{C}^u$ *– произвольные постоянные. Тогда многообразие* $U\times N^1\times\cdots\times N^k$, *наделенное метрикой*

$$ds^2=\sum_{v=1}^{k}(dx^v)^2+(C_v^u x^v+\overline{C}^u)^2 ds_u^2,$$

*является риччи-плоским пространством.*

Государственный инженерный университет Армении

Վ. Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

## Բազմաչափ ծնորդներով կոներ էյնշտեյնյան տարածությունների վրա

*Աշխատանքում սահմանված են բազմաչափ ծնորդներով կոներ կամայական ռիմանյան տարածությունների վրա: Ապացուցված է, որ կամայական ռիմանյան տարածությունների վրա կառուցված էվկլիդեսյան կամ պսևդոէվկլիդեսյան ծնորդներով կոները կամ կիսաէյնշտեյնյան տարածություններ են, կամ էլ զրոյական Ռիչչի տենզորով տարածություններ: Այս կոները հանդիսանում են կիսաէյնշտեյնյան տարածությունների առաջին էական օրինակներ: Աշխատանքում նկարագրված է նաև զրոյական Ռիչչի տենզորով տարածությունների կառուցման նոր մեթոդ վերջավոր թվով էյնշտեյնյան տարածությունների վրա:*

## ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В.А.Мирзоян*, Изв. вузов. Математика, №6, с.80-89, 1992. [2] *А.З.Петров*. Пространства Эйнштейна, М., Физматгиз, 1961. [3] *А.Бессе*, Многообразия Эйнштейна, т.1,2, М., Мир, 1990. [4] *В.А.Мирзоян*, Итоги науки и техники, Проблемы геометрии, т.23, с.29-66 (1991). [5] *Z.I.Szabo*, J.Diff, Geom., v.17, p.531-582 (1982). [6] *S.S.Chern, N.Kuiper*, Ann.Math., v.56, №3, p.422-430 (1952). [7] *Г.И.Кручкович*, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, т.11, с.103-128 (1961). [8] *R.Bishop, B.O'Neill*, Trans.Amer.Math.Soc., v.145, p.1-49 (1969). [9] *П.К.Рашевский*, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., Наука, 1967.