

УДК 539.3

В. Ц. Гнуни

Об определении начальных напряжений в пластинках и оболочках

(Представлено академиком НАН Армении Г.Е.Багдасаряном 3/III 1998)

При изготовлении оболочек или их сборке возникают начальные напряжения, имеющие, вообще говоря, стохастический характер. Статистический анализ всех факторов, являющихся причиной начальных напряжений, практически невозможен. Тем не менее знание хотя бы порядка внутренних напряжений представляет первостепенную важность.

Известно ⁽¹⁾, что разрезая тело, носящее начальные напряжения, на части, можно по неизбежно возникающим перемещениям определить начальные напряжения. Однако практическая ценность такого подхода весьма мала.

В настоящей работе рассматривается вопрос определения начальных напряжений в пластинках и весьма пологих оболочках по перемещениям оболочки или пластинки под действием некоторых систем внешних нагрузок. Очевидно, что поставленная задача не может быть решена на базе уравнений линейной теории.

Если начальные напряжения являются следствием больших деформаций, с помощью которых получалось тело данной формы, то любое "дополнительное" состояние существенно будет зависеть от начального напряженного состояния ⁽²⁾, что дает теоретическую возможность определить начальные напряжения. Однако начальные напряжения могут быть результатом небольших деформаций, что весьма вероятно в случае оболочек, тогда указанный выше путь определения начальных напряжений окажется непригодным.

На основе вышеизложенного на первой стадии исследования возможностей экспериментального определения начальных напряжений отказ от линейного закона упругости является не очень реальным способом определения начальных напряжений.

Если под действием внешних сил в теле реализуются большие перемещения, то они по существу зависят от начального состояния ⁽²⁾.

Следует отметить работу (3), где схожая по постановке обратная задача рассматривается для мембран и пластинок в несколько иной интерпретации.

1. Пусть в весьма пологой оболочке двоякой кривизны k_1, k_2 и постоянной толщины h имеются некоторые начальные тангенциальные усилия T_{ij}^0 , поперечные усилия T_{i3}^0 и моменты M_{ij}^0 . Эти усилия и моменты удовлетворяют следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}^0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^0}{\partial y} = 0, \quad k_1 T_{11}^0 + k_2 T_{22}^0 + \frac{\partial T_{13}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}^0}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial M_{11}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial y} = T_{13}^0, \quad \frac{\partial M_{12}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^0}{\partial y} = T_{23}^0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

и условиям свободного края.

При составлении уравнений (1.1) предполагалось, что начальные деформации по отношению к данной форме оболочки равны нулю.

Приложим на оболочку с начальными усилиями и моментами некоторую систему внешних нагрузок, тогда

$$T'_{ij} = T_{ij}^0 + T_{ij}, \quad T'_{i3} = T_{i3}^0 + T_{i3}, \quad M'_{ij} = M_{ij}^0 + M_{ij}, \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.2)$$

Внешние нагрузки считаются настолько большими, что прогибы дополнительного состояния w сравнимы с толщиной оболочки.

Полные усилия и моменты (1.2) должны удовлетворять уравнениям равновесия гибких оболочек (4,5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{12}}{\partial y} - T'_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T'_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial T'_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{22}}{\partial y} - T'_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T'_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ k_1 T'_{11} + k_2 T'_{22} + \frac{\partial T'_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{23}}{\partial y} + T'_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T'_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + Z = 0, \\ \frac{\partial M'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M'_{12}}{\partial y} = T'_{13}, \quad \frac{\partial M'_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M'_{22}}{\partial y} = T'_{23}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставляя соотношения (1.2) в систему (1.3) и учитывая, что начальные усилия и моменты связаны системой (1.1), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M_{11}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial M_{12}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^0}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial T_{11}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}^0}{\partial y} - T_{13}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_{23}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \left(\frac{\partial M_{11}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial M_{12}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^0}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial T_{12}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^0}{\partial y} - T_{13}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_{23}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ T_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -Z - \frac{\partial T_{13}^0}{\partial x} - \frac{\partial T_{23}^0}{\partial y} - k_1 T_{11}^0 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k_2 T_{22} - T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
& T_{13} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y}, \quad T_{23} = \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где (6)

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{12} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
T_{11} &= B(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \quad T_{12} = \frac{B(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}, \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\
D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B = \frac{Eh}{1-\nu^2}.
\end{aligned}$$

Зная перемещения под действием некоторых Z_k , из уравнений (1.5) можно определить значения начальных усилий T_{ij}^0 , T_{i3}^0 ($i, j = 1, 2$), а также

$$\frac{\partial M_{11}^0}{\partial x}, \frac{\partial M_{22}^0}{\partial y}, \frac{\partial M_{12}^0}{\partial x}, \frac{\partial M_{12}^0}{\partial y}.$$

Используя условия свободного края для незагруженной оболочки и имея значения производных от начальных моментов, можно определить M_{ij}^0 .

2. Рассмотрим случай, когда начальные напряжения приближенно предполагаются не зависящими от координаты z . Тогда $T_{ij}^0 \neq 0$, $T_{i3}^0 \equiv 0$, $M_{ij}^0 \equiv 0$ ($i, j = 1, 2$).

Система (1.4) представится в виде

$$\begin{aligned}
& T_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -Z + D\Delta^2 w - \\
& -k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\
& \frac{1}{Eh} \Delta^2 \varphi = -k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

При получении системы (2.1) в первых двух уравнениях (1.4) пренебрегалось влиянием нелинейных членов, содержащих M_{ij} , и была введена функция усилий

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Если в оболочке отсутствовали начальные усилия T_{ij}^0 , то правая часть первого уравнения (2.1) при удовлетворении второго уравнения равнялась бы нулю, и

$$Z^* = D\Delta^2 w - k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Если $T_{ij}^0 \neq 0$, то при эксперименте (изгиб оболочки под действием давления) прогибы, удовлетворяющие системе (2.1), реализуются под действием некоторого Z , отличного от (2.2). Тогда правая часть первого уравнения (2.1) суть $Z^* - Z$.

При заданном значении постоянного давления Z_k поле перемещения $w_k(x, y)$ можно определить аппроксимацией по известным в достаточном количестве точек (x_i, y_i) экспериментальным значениям прогиба $w_k(x_i, y_i)$, с учетом реализованных граничных условий на краях оболочки или пластинки.

По найденным значениям функции прогиба $w_k(x, y)$ из уравнения

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \varphi_k = -k_1 \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} \right)^2,$$

при соответствующих граничных условиях, реализованных в эксперименте, можно определить функцию усилий $\varphi_k(x, y)$.

Подстановкой значений $w_k(x, y)$ и $\varphi_k(x, y)$ в левую часть уравнения (2.2) найдем значения $Z_k^*(x, y)$ для каждого эксперимента.

Имея обработанные результаты трех серий эксперимента относительно трех значений постоянного давления Z_k , для определения искоемых трех начальных усилий $T_{11}^0(x, y), T_{22}^0(x, y), T_{12}^0(x, y)$ получим систему трех алгебраических уравнений

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} T_{11}^0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} T_{22}^0 + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} T_{12}^0 = Z_k^* - Z_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

Таким образом, показано, что для определения начальных безмоментных усилий $T_{ij}^0(x, y)$ необходимо и достаточно иметь поле перемещения $w(x, y)$ для трех значений внешней нагрузки при реализованных в эксперименте граничных условиях.

Необходимо отметить, что нагружение и граничные условия можно подбирать исходя из возможностей постановки эксперимента.

Институт механики НАН Армении

Վ. Յ. ԳՆՈՒՆԻ

Թաղանթների և սալերի նախնական լարումների որոշման մասին

Առաջարկվում է եղանակ բարակ սալերում և թաղանթներում նախնական լարումները որոշելու համար: Ցույց է տրվում նախնական ճիգերի և մոմենտների որոշման հնարավորությունը, եթե սալը կամ թաղանթը առաձգականության սահմաններում կամ առանց քայքայվելու կարող է թուլատրել հաստության կարգի ճկվածքներ: Մասնավոր դեպքում ենթադրվում է տարբերակ, երբ կարելի է ընդունել, որ նախնական լարումները չեն փոխվում ըստ հաստության:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С.П.Тимошенко, Теория упругости, Л.-М., ОНТИ, 1937. ² В.В.Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, М.-Л., Гостехиздат, 1948. ³ S.A.Ambartsumian, M.V.Belubekian, L.A.Movsisian, Изв. НАН Армении, Механика, т.49, №3, с.3-9 (1996). ⁴ Х.М.Муштари, К.З.Галимов, Нелинейная теория упругих оболочек, Казань, Таткнигоиздат, 1957. ⁵ В.Ц.Гнуни, Тр.VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок, М., Наука, 1970. ⁶ А.С.Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, ГИТТЛ, М., 1956.