ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №2

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.92

М. Е. Арутюнян

Об интерференционном канале с коррелированным кодированием

(Представлено академиком НАН Армении Ю.Г.Шукуряном 6/II 1998)

Изучается интерференционный канал, один из двух кодеров которого имеет полную информацию о сигналах с другого кодера. Построена граница случайного кодирования для области E-пропускной способности этого канала.

Интерференционный канал имеет несколько входов и несколько выходов; каждый вход посылает сообщения соответствующему выходу через канал.

Впервые такой канал был рассмотрен Шенноном ([1]), затем Алсведе ([2,3]) получил границы для области пропускной способности. Работы Карлайла ([4-6]), а также ряд других работ посвящены исследованию интерференционных каналов, однако пропускная способность была определена лишь для частных случаев.

Для простоты изложения достаточно рассматривать случай с двумя входами и двумя выходами, так как результат несложно обобщить на случай многих передающих сторон.

В данной статье рассмотрен случай, когда один из двух кодеров получает кодовое слово, посылаемое с другого кодера. Для такой конфигурации ранее результатов получено не было.

Дискретный интерференционный канал задается двумя конечными входными алфавитами $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, двумя конечными выходными алфавитами $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ и условными вероятностями

$$W(y_1,y_2|x_1,x_2),\ (y_1,y_2)\in(\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_2),\ (x_1,x_2)\in(\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2).$$

Переходные вероятности на соответствующих выходах определяются следующим образом:

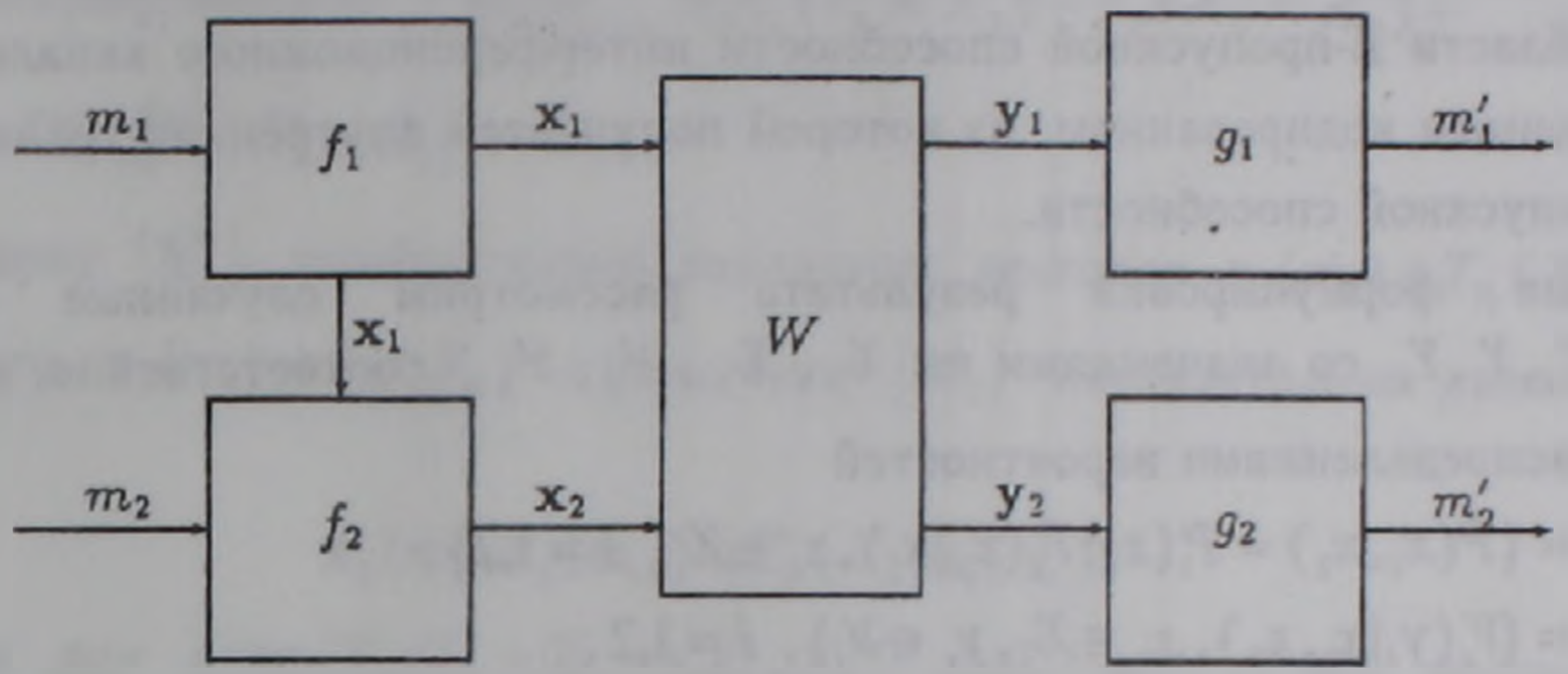
$$W_1(y_1|x_1,x_2)=\sum_{y_2\in\mathcal{Y}_2}W(y_1y_2|x_1,x_2),$$

$$W_2(y_2|x_1,x_2)=\sum_{y_1\in\mathcal{Y}_1}W(y_1y_2|x_1,x_2).$$

Рассматривается канал без памяти, т.е. переходные вероятности векторов длины n получаются как произведение переходных вероятностей соответствующих компонент: пусть $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n) \in \mathcal{X}_1^n$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2^n$, $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{Y}_1^n$, $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}_2^n$, тогда

$$W^n(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \prod_{t=1}^{n} W(y_1^t, y_2^t | x_1^t, x_2^t).$$

Конечные множества сообщений m_1, m_2 первого и второго источников обозначим, соответственно, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.



Интерференционный канал с коррелированным кодированием

Кодом (f, g) называется набор четырех отображений (f_1, f_2, g_1, g_2), где $f_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{X}_1^n$, $f_2 : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{X}_1^n \to \mathcal{X}_2^n$ суть операции кодирования, а $g_1 : \mathcal{Y}_1^n \to \mathcal{M}_1$, $g_2 : \mathcal{Y}_2^n \to \mathcal{M}_2$ декодирования на соответствующих выходах.

Пара скоростей этого кода определяется следующим образом:

$$R_i = n^{-1} \log |\mathcal{M}_i|, \quad i = 1,2.$$

(В этой статье все экспоненты и логарифмы берутся по основанию 2.)

Обозначим

$$f_1(m_1) = \mathbf{x}_1(m_1), \; f_2(m_2 | m_1) = \mathbf{x}_2(m_2, \mathbf{x}_1(m_1)),$$
$$f(m_1, m_2) = (\mathbf{x}_1(m_1), \mathbf{x}_2(m_2, \mathbf{x}_1(m_1))).$$

Рассматриваются средние вероятности ошибок на двух выходах:

$$e_i(f_i, g_i) = \frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1, m_2} e_i(m_1, m_2) =$$
$$= \frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1, m_2} W_i^n \{\mathcal{Y}_i^n - g_i^{-1}(m_i) | f(m_1, m_2)\}, \; i = 1,2. \qquad (1)$$

Пусть $E_i > 0$, $i = 1,2$ и $E = (E_1, E_2)$. Неотрицательные действительные числа R_1, R_2 называются E-достижимой парой скоростей для интерференционного канала при средней вероятности ошибки, если для любого $\delta > 0$ существует код такой, что для достаточно больших n

$$\frac{1}{n}\log|\mathcal{M}_i| \le R_i - \delta, \quad i=1,2$$

и

$$e_i(f_i,g_i) \le \exp\{-nE_i\}, \quad i=1,2. \tag{2}$$

Область всех E-достижимых пар скоростей называется областью E-пропускной способности $C(E)$. Предел этой области, когда одновременно $E_1 \to 0$, $E_2 \to 0$, является областью пропускной способности C при средней вероятности ошибки.

В настоящей статье построена внутренняя граница случайного кодирования области E-пропускной способности интерференционного канала с коррелированным кодированием, из которой получается внутренняя граница области пропускной способности.

Для формулировки результата рассмотрим случайные величины X_1, X_2, Y_1, Y_2 со значениями из $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$, соответственно, и задаваемые распределениями вероятностей

$P = \{P(x_1,x_2) = P_1(x_1)P_2(x_2|x_1), x_i \in \mathcal{X}_i, \ i=1,2\}$,

$V_i = \{V_i(y_i|x_1,x_2), \ x_i \in \mathcal{X}_i, y_i \in \mathcal{Y}_i\}, \ i=1,2$,

$P \circ V_i = \{P \circ V_i(x_1,x_2,y_i) = P(x_1,x_2)V_i(y_i|x_1,x_2), \ x_i \in \mathcal{X}_i, y_i \in \mathcal{Y}_i\}, \ i=1,2.$

Определения хорошо известных понятий энтропии, взаимной информации, дивергенции, типов, условных типов, комбинаторные неравенства и соотношения даны в [7-10].

Рассмотрим следующую область

$$\mathcal{R}_r(P,E) = \Big\{(R_1,R_2):$$

$$0 \le R_1 \le \min_{V_1: D(V_1\|W_1|P)\le E_1} \left|I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1) + D(V_1\|W_1|P) - E_1\right|^+, \tag{3}$$

$$0 \le R_2 \le \min_{V_2: D(V_2\|W_2|P)\le E_2} \left|I_{P,V_2}(Y_2 \wedge X_2) - I_P(X_1 \wedge X_2) + D(V_2\|W_2|P) - E_2\right|^+ \Big\}. \tag{4}$$

Обозначим

$$\mathcal{R}_r(E) = co \bigcup_P \mathcal{R}_r(P,E).$$

Ниже будет доказана следующая

Т е о р е м а. *Для всех* $E=(E_1,E_2)$, $E_1>0, E_2>0$.

$$\mathcal{R}_r(E) \subset C(E). \tag{5}$$

С л е д с т в и е. Внутренняя граница области пропускной способности C рассматриваемого канала при средней вероятности ошибки задается как выпуклое замыкание по всем P

$$\mathcal{R}_r(P)=\{(R_1,R_2):$$
$$0\le R_1\le I_{P,W_1}(Y_1\wedge X_1),$$
$$0\le R_2\le I_{P,W_2}(Y_2\wedge X_2)-I_P(X_1\wedge X_2)\}.$$

Доказательство теоремы основано на следующей модификации леммы об упаковке из [7].

Лемма. *Для любых* $E_1>\delta_1>0,\ E_2>\delta_2>0$, P *на* $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2$, *если*

$$0\le|\mathcal{M}_1|\le\exp\left\{n\min_{V_1:D(V_1\|W_1|P)\le E_1}\left|I_{P,V_1}(Y_1\wedge X_1)+D(V_1\|W_1|P)-E_1\right|^+-\delta_1\right\},\quad(6)$$

$$\begin{gathered}0\le|\mathcal{M}_2|\le\exp\{n\min_{V_2:D(V_2\|W_2|P)\le E_2}\left|I_{P,V_2}(Y_2\wedge X_2)-I_P(X_1\wedge X_2)+\right.\\ \left.+D(V_2\|W_2|P)-E_2\right|^+-\delta_2\},\end{gathered}\quad(7)$$

то существует $|\mathcal{M}_1|$ *необязательно различных векторов* $\mathbf{x}_1(m_1)\in T_{P_1}(X_1)$ *и для каждого* $\mathbf{x}_1(m_1)\in T_{P_1}(X_1)$ *существует* $|\mathcal{M}_2|$ *необязательно различных векторов*

$$\mathbf{x}_2(m_2,\mathbf{x}_1(m_1))\in T_P(X_2|\mathbf{x}_1(m_1))$$

таких, что для всех $V_1:\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\to\mathcal{Y}_1,\ V_1':\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\to\mathcal{Y}_2$, *при достаточно больших* n *имеют место следующие неравенства:*

$$\begin{gathered}\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2}\left|T_{P,V_1}(Y_1|f(m_1,m_2))\cap\bigcup_{m_1'\ne m_1}\bigcup_{m_2'}T_{P,V_1'}(Y_1|f(m_1',m_2'))\right|\le\\ \le\exp\{nH_{P,V_1}(Y_1|X_1X_2)\}\exp\{-n\left|E_1-D(V_1'\|W_1|P)\right|^+\},\end{gathered}\quad(8)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2}\left|T_{P,V_2}(Y_2|f(m_1,m_2))\cap\bigcup_{m_2'\ne m_2}\bigcup_{m_1'}T_{P,V_2'}(Y_2|f(m_1',m_2'))\right|\le\\ \le\exp\{nH_{P,V_2}(Y_1|X_1X_2)\}\exp\{-n\left|E_2-D(V_2'\|W_2|P)\right|^+\},\end{gathered}\quad(9)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы [8,9], оно опускается ввиду большого объема. Для доказательства теоремы нужно показать существование кода со скоростями из области $R_r(E)$ с вероятностями ошибок, удовлетворяющими (2). Согласно лемме существование $|\mathcal{M}_1|\times|\mathcal{M}_2|$ векторов $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, удовлетворяющих условиям (6-9), гарантировано.

Декодирование определим согласно принципу "минимальной дивергенции". А именно, пусть $g_1(\mathbf{y}_1)=m_1$, если $\mathbf{y}_1\in T_{P,V_1}(Y_1|f(m_1,m_2))$ при V_1, при котором дивергенция $D(V_1\|W_1|P)$ минимальна, далее пусть $g_2(\mathbf{y}_2)=m_2$, когда $\mathbf{y}_2\in T_{P,V_2}(Y_2|f(m_1,m_2))$ при V_2, для которого $D(V_2\|W_2|P)$ минимальна.

При передаче сообщения m_1 ошибка декодирования на первом декодере произойдет, если существуют сообщение m_1' и условный тип V_1' такие, что

$$\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1|f(m_1,m_2)) \cap T_{P,V_1'}(Y_1|f(m_1',m_2))$$

и

$$D(V_1'\|W_1|P) \le D(V_1\|W_1|P). \tag{10}$$

Обозначим $\mathcal{V} = \{V_1, V_1' : \text{имеет место } (10)\}$.

Средняя вероятность ошибки полученного кода может быть оценена следующим образом:

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1\|\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2} e_1(m_1,m_2) \le$$

$$\le \frac{1}{|\mathcal{M}_1\|\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2} W_1^n\{\bigcup_{\mathcal{V}} T_{P,V_1}(Y_1|f(m_1,m_2)) \cap$$

$$\cap \bigcup_{m_1' \neq m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1|f(m_1',m_2')|f(m_1,m_2))\} \le$$

$$\le \frac{1}{|\mathcal{M}_1\|\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2}\sum_{\mathcal{V}} \left| T_{P,V_1}(Y_1|f(m_1,m_2)) \cap \bigcup_{m_1' \neq m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1|f(m_1',m_2')) \right| \times$$

$$\times W_1^n(\mathbf{y}|f(m_1,m_2)) \le$$

$$\le \sum_{\mathcal{V}} \exp\left\{-nH_{P,V_1}(Y_1|X_1X_2) + D(V_1\|W_1|P))\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{nH_{P,V_1}(Y_1|X_1X_2)\right\}\exp\{-n(E_1 - D(V_1'\|W_1|P))\} \le$$

$$\le \exp\{-n(E_1 - \delta)\}$$

Таким образом, (2) следует из произвольности $\delta > 0$. Вероятность ошибки на другом выходе можно оценить аналогично. Теорема доказана.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении

Մ. Ե. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Կապակցված կոդավորումով փոխազդող կապուղու մասին

Ինտերֆերենց կապուղին ունի մի քանի մուտք և մի քանի ելք: Ընդհանուր կապուղու միջոցով յուրաքանչյուր մուտքից հաղորդում են հաղորդագրություններ համապատասխան ելքին: Առաջին անգամ այսպիսի կապուղին դիտարկել է Շեննոնը ([1]), որից հետո հետազոտությունները շարունակել են Ալսֆեդեն ([2,3]), Կառլայլը ([4-6]) և ուրիշներ: Սակայն կապուղու ունակությունը որոշված է միայն մասնավոր դեպքերում:

Պարզության համար բավական է դիտարկել երկու մուտքերով և երկու ելքերով դեպքը, քանի որ արդյունքները հեշտությամբ ընդհանրացվում են բազմակի մուտքերով և ելքերով դեպքի համար:

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է ինտերֆերենց կապուղու այն տարբերակը, երբ երկու կոդավորիչներից մեկը լրիվ տեղեկություն է ստանում մյուս կոդավորիչից: Դիտարկվում է առանց հիշողության դեպքը: Նշված կապուղու համար պատահական կոդավորման մեթոդով կառուցվում է E-ունակության տիրույթի ներքին գնահատականը, որից ստացվում է ունակության տիրույթի ներքին գնահատականը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C.E.Shannon*, Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., v.1, p.611-644 (1961). [2] *R.Ahlswede*, 2nd Intern. Symp. on Inform. Theory. Tsahkadzor, Armenian SSR. 1971, Akademiai Kiado, Budapest, p.23-52, 1973. [3] *R.Ahlswede*, Annals of Probability, v.2, p.805-814 (1974). [4] *A.B.Carleial*, IEEE Trans. Inform. Theory, v.21, p.569-570 (1975). [5] *A.B.Carleial*, IEEE Trans. Inform. Theory, v.24, №1, p.60-70 (1978). [6] *A.B.Carleial*, IEEE Trans. Inform. Theory, v.29, №4, p.602-604 (1983). [7] *И.Чисар, Я.Кернер*, Теория информатики, М., Мир, 1985. [8] *М.Е.Арутюнян*, Проблемы передачи информации, т.27, №1, с.14-23 (1991). [9] *М.Е.Арутюнян*, Проблемы передачи информации, т.26, №4, с.16-23 (1990).