ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.62, 519.64

Академик НАН Армении А. Б. Нерсисян, А. В. Погосян, К. П. Саакян

Численное решение уравнений сверточного типа

(Представлено 18/XI 1997)

В работе (1) предложен метод параметрической интерполяции для приближенного символического решения некоторых типов уравнений. В частности, речь шла о схеме решения операторных уравнений вида $Lu(x) = f(x)$, удовлетворяющих условию $L(e^{i\lambda x}) = l(\lambda)e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in [-1, 1]$.

Ниже этот подход применен к интегро-дифференциальным уравнениям определенного типа. В отличие от схемы заметки (1), здесь приведены подробные выкладки и разъяснения.

1. Рассмотрим начальную задачу

$$Ly(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^p \left[q_n \frac{d^n}{dx^n} y(x) + \int_{-1}^1 K_n(x-z) \frac{d^n}{dz^n} y(z) dz \right] = f(x), \quad (1)$$

$$x \in [-1, 1], \quad y^{(n)}(t) = Y_n, \quad n = 0, 1, \dots, p-1,$$

где q_n ($n = 0, \dots, p$) от x не зависят, функции $K_n(x)$ ($n = 0, \dots, p$) $|x| \leq 2$ предполагаются периодическими ($K_n(x+2) = K_n(x)$) и непрерывными, $t \in [-1, 1]$ – фиксированное число. Предполагается, что эта задача корректна в $C^p[-1, 1]$.

Пусть $N \geq 1$ – целое, $\{\theta_n(N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_m(N)\}_{m=1}^p$, $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^p$ заданные последовательности такие, что ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n n^{2p}$ сходится абсолютно, $\varphi_m \in C^p[-1, 1]$ $m = 1, \dots, p$ а система $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^p \cup \{e^{i\mu_m x}\}_{n=-N}^N$ линейно независима на $[-1, 1]$.

Обозначим

$$y(f, N, x) = \sum_{k=-N}^N a_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) Y_k, \quad (2)$$

$$R_N(y(x)) = y(x) - y(f, N, x), \quad (3)$$

где $x_k = \frac{2k}{2N+1}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. В каждой точке $x \in [-1, 1]$ коэффициенты

$\{a_k(x)\}_{k=-N}^N$ и $\{b_k(x)\}_{k=0}^{p-1}$ определим из условия безусловной минимизации следующего функционала (см. (1)):

$$I(a(x), b(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n |R_N(e^{i\pi n x})|^2 + \sum_{m=1}^p \mu_m |R_N(\varphi_m(x))|^2 \rightarrow \min.$$

Вектор-функции $a(x) = (a_{-N}(x), \dots, a_N(x))^T$ и $b(x) = (b_0(x), \dots, b_{p-1}(x))^T$,

определяются как решения системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_s} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \left[e^{i\pi n x} - l_n \sum_{k=-N}^N a_k(x) e^{i\pi n x_k} - e^{i\pi n t} \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) (i\pi n)^k \right] \times \\ &\times \bar{l}_n e^{-i\pi n x_s} + \sum_{m=1}^p \mu_m \left[\varphi_m(x) - g_m(x) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) \varphi_m^{(k)}(t) \right] \overline{r_m(x_s)} = 0, \quad (4) \\ & s = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial b_l} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \left[e^{i\pi n x} - l_n \sum_{k=-N}^N a_k(x) e^{i\pi n x_k} - e^{i\pi n t} \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) (i\pi n)^k \right] \times \\ &\times (-i\pi n)^l e^{-i\pi n t} + \sum_{m=1}^p \mu_m \left[\varphi_m(x) - g_m(x) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) \varphi_m^{(k)}(t) \right] \overline{\varphi_m^{(l)}(t)} = 0, \quad (5) \\ & l = 0, \dots, p-1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{k=0}^p (i\pi n)^k \left[q_k + \int_{-1}^1 K_k(z) e^{-i\pi n z} dz \right], \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \\ r_m(x) &= \sum_{k=0}^p \left[q_k \varphi_m^{(k)}(x) + \int_{-1}^1 K_k(x-z) \varphi_m^{(k)}(z) dz \right], \quad m = 1, \dots, p, \quad (6) \\ g_m(x) &= \sum_{k=-N}^N a_k(x) r_m(x_k), \quad m = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Можно показать, что если числа

$$d_s = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \theta_{s+(2N+1)r} |l_{s+(2N+1)r}|^2, \quad s = 0, \pm 1, \dots, \pm N,$$

не равны нулю, то вектор-функция $a(x)$ выразится через вектор-функции $b(x)$ и $g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))^T$ следующим образом (см. также (1)):

$$a_k(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-i\pi n x_k}}{d_n} \left[h_n(x) - \sum_{s=0}^{p-1} b_s(x) h_n^{(s)}(t) + \sum_{m=1}^p X_{nm} \mu_m \{ \varphi_m(x) - \right. \\ \left. - g_m(x) - \sum_{s=0}^{p-1} b_s(x) \varphi_m^{(s)}(t) \} \right], \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (7)$$

где $h_n(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \theta_{n+(2N+1)r} \bar{l}_{n+(2N+1)r} e^{i\pi(n+(2N+1)r)x}$,

$$X_{nm} = \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \overline{r_m(x_s)} e^{i\pi n x_s}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad m = 1, \dots, p.$$

Используя (5) и (6), получим следующую систему для определения $b(x)$ и $g(x)$:

$$\sum_{m=1}^p A_{\tau m} g_m(x) + \sum_{k=0}^{p-1} B_{\tau k} b_k(x) = E_{\tau}(x), \quad \tau = 1, \dots, p, \quad (8)$$

$$\sum_{m=1}^p C_{lm} g_m(x) + \sum_{k=0}^{p-1} D_{lk} b_k(x) = F_l(x), \quad l = 0, \dots, p-1,$$

где приняты следующие обозначения ($\|\delta_{ij}\|_{i,j=1}^p$ — единичная матрица):

$$E_{\tau}(x) = \sum_{s=-N}^N \frac{\overline{X_{s\tau}}}{d_s} \left[h_s(x) + \sum_{m=1}^p X_{sm} \mu_m \varphi_m(x) \right], \quad \tau = 1, \dots, p.$$

$$F_l(x) = \sum_{s=-N}^N \frac{\overline{h_s^{(l)}(t)}}{d_s} \left[h_s(x) + \sum_{m=1}^p X_{sm} \mu_m \varphi_m(x) \right] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n (-i\pi n)^l e^{i\pi n(x-t)} -$$

$$- \sum_{m=1}^p \mu_m \overline{\varphi_m^{(l)}(t)} \varphi_m(x), \quad l = 0, \dots, p-1,$$

$$A_{\tau m} = \delta_{\tau m} + \mu_m \sum_{s=-N}^N \frac{\overline{X_{s\tau}}}{d_s} X_{sm}, \quad \tau, m = 1, \dots, p,$$

$$B_{\tau k} = \sum_{s=-N}^N \frac{\overline{X_{s\tau}}}{d_s} \left[h_s^{(k)}(t) + \sum_{m=1}^p X_{sm} \mu_m \varphi_m^{(k)}(t) \right], \quad \tau = 1, \dots, p, \quad k = 0, \dots, p-1$$

$$C_{lm} = \mu_m \sum_{s=-N}^N \frac{\overline{h_s^{(l)}(t)}}{d_s} X_{sm} - \mu_m \overline{\varphi_m^{(l)}(t)}, \quad l = 0, \dots, p-1, \quad m = 1, \dots, p,$$

$$D_{lk} = \sum_{s=-N}^N \frac{\overline{h_s^{(l)}(t)}}{d_s} \left[h_s^{(k)}(t) + \sum_{m=1}^p X_{sm} \mu_m \varphi_m^{(k)}(t) \right] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n (-i\pi n)^l (i\pi n)^k -$$

$$- \sum_{m=1}^p \mu_m \overline{\varphi_m^{(k)}(t)} \varphi_m^{(l)}(t), \quad l, k = 0, \dots, p-1.$$

Теорема 1. Пусть функции $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^p$ таковы, что система (8) имеет единственное решение. Тогда для любых N , $\{\theta_n(N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{\mu_m(N)\}_{m=1}^p$ функция $y(f, N, x)$ удовлетворяет начальным условиям задачи (1).

Доказательство. Продифференцируем систему (8) по x j раз, $j = 0, \dots, p-1$. Так как $E_\tau^{(j)}(t) = B_\tau$, $F_l^{(j)}(t) = D_l$, $\tau = 1, \dots, p$, $j = 0, \dots, p-1$, $l = 0, \dots, p-1$, то вектор-функции $b(x)$ и $g(x)$ должны иметь следующие свойства:

$$g_m^{(j)}(t) = 0, b_k^{(j)}(t) = \delta_{kj} \quad m = 1, \dots, p, \quad k = 0, \dots, p-1, \quad j = 0, \dots, p-1. \quad (9)$$

Из (2), (7) и (9) следует, что $a_k^{(j)}(t) = 0$, $y^{(j)}(f, N, t) = Y_j$, $j = 0, \dots, p-1$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$.

2. Рассмотрим простейший частный случай, когда $\theta_n = 1$, при $|n| \leq N$ и $\theta_n = 0$, при $|n| > N$. Из (2), (7) и (8) имеем

$$y(f, N, x) = \sum_{n=-N}^N \frac{f_n}{l_n} \left[e^{i\pi n x} - e^{i\pi n t} \sum_{s=0}^{p-1} b_s(x) (i\pi n)^s \right] + \sum_{s=0}^{p-1} b_s(x) Y_s, \quad (10)$$

здесь $f_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N f(x_k) e^{-i\pi n x_k}$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, а

$$b_s(x) = \sum_{m=1}^p Q_{sm} G_m(x), \quad s = 0, \dots, p-1, \quad (11)$$

где $Q = \|Q_{sm}\|_{\substack{s=0 \\ m=1}}^{p-1}$ — обратная матрица к $\|G_m^{(j)}(t)\|_{\substack{m=1 \\ s=0}}^p$, а

$$G_m(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{\overline{X_{nm}}}{l_n} e^{i\pi n x} - \varphi_m(x), \quad m = 1, \dots, p. \quad (12)$$

Замечание 1. Легко проверить, что $Ly(f, N, x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, $Ly(\varphi_m(x), N, x) = \varphi_m(x)$, $m = 1, \dots, p$, $Ly(e^{i\pi n x}, N, x) = e^{i\pi n x}$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, для таких $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^p$, что матрица Q существует.

Теорема 2. Пусть $\varphi_m(x)$ ($m = 1, \dots, p$) такие, что существует матрица Q , равномерно ограниченная по евклидовой норме числом, не зависящим от N .

Тогда $b_s(x) \rightarrow y(x)$ ($N \rightarrow \infty$) $s = 0, \dots, p-1$ равномерно по $x \in [-1, 1]$, где $y(x)$ — решение однородной задачи (1).

Доказательство. Из (11) и (12) имеем

$$\|Lb_s(x)\|_{L_2}^2 \leq \text{Const} \max_{1 \leq m \leq p} \|LG_m(x)\|_{L_2}^2 \rightarrow 0, \quad (N \rightarrow \infty), \quad s=0, \dots, p-1.$$

Из корректности задачи (1) следует, что соответствующий обратный оператор L^{-1} – интегральный.

Теорема 3. Пусть $f \in L_2(-1,1)$ и выполнены условия теоремы 2.

Тогда $R_N(y(x)) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) равномерно по $x \in [-1,1]$.

Доказательство достаточно провести для случая, когда $Y_s = 0$ ($s=0, \dots, p-1$). Из (3) и (10) имеем, согласно теореме 2,

$$\|LR_N(y(x))\|_{L_2}^2 \leq \text{Const} \left(\sum_{n=-N}^n \frac{|f_n|}{|n|} \right)^2 \max_{0 \leq s \leq p-1} \|Lb_s(x)\|_{L_2}^2 + \left\| \sum_{|n| > N} f_n e^{imx} \right\|_{L_2}^2 \rightarrow 0, \quad (N \rightarrow \infty).$$

3. Численный пример. Пусть $y(x) = \frac{\cos 9x}{0,3 + x^2}$. Рассмотрим следующую

задачу:

$$y''' + y'' + y' + 2y + \int_{-1}^1 e^{\sin \pi(x-t)} y(t) dt + \int_{-1}^1 \ln(2 + \cos \pi(x-t)) y'(t) dt + 2 \int_{-1}^1 y''(t) dt + \int_{-1}^1 (1 - \sin 2\pi(x-t)) y'''(t) dt = f(x). \quad (13)$$

Функция f вычисляется явно и

$$y(0) = 3,3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -292,2.$$

N	$\varepsilon_1(s)$	$s_1(s)$	$\varepsilon_2(s)$	$s_2(s)$	$a(s)$
5	110	–	200	–	–
9	17	6,5	35	5,7	1
17	0,036	460	0,08	437,5	2,3
33	0,02	1,8	0,05	1,6	2,5
65	0,0048	4,1	0,012	4,1	2,5
129	0,0012	4	0,003	4	3,3
257	0,0003	4	0,0007	4,2	3,5
513	0,000076	4	0,000175	4	3,7
1025	0,000019	4	0,000043	4	4

Эта задача решалась на системе МАТНЕМАТИСА 3.0 (см. (2)), согласно формулам (10), (11), (12), где в качестве $\varphi_m(x)$ $m=1, \dots, p$, были взяты функции e^{mx} , $m=1, \dots, p$. Приводится таблица ошибок, где приняты следующие обозначения

$$N = 2^{s+1} + 1, \quad \varepsilon_1(s) = \|R_N\|_{L_2}, \quad \varepsilon_2(s) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |R_N|, \quad s = 1, 2, \dots$$

$$s_1(s) = \frac{\varepsilon_1(s-1)}{\varepsilon_1(s)}, \quad s_2(s) = \frac{\varepsilon_2(s-1)}{\varepsilon_2(s)}, \quad a(s) = \frac{t(s)}{t(s-1)}, \quad s = 2, 3, \dots,$$

где $t(s)$ – время, затраченное на вычисления при данном s .

Как видим, в данном случае алгоритм имеет порядок $O(1/N^2)$ ($N \rightarrow \infty$), что свидетельствует о достаточной эффективности метода.

Институт математики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ,

Ա. Վ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Կ. Պ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Փաթեթի տիպի հավասարումների թվային լուծում

Առաջարկվում է եղանակ, որի միջոցով գտնվում են փաթեթի տիպի ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների և համապատասխան եզրային խնդիրների մոտավոր լուծումները:

Նշված եղանակը աշխատում է արդյունավետ և հնարավորություն է տալիս լուծել խնդիրներ՝ պարամետրներից կախված տվյալներով: Հողվածում տեղ գտած բանաձևերը առաջին հայացքից մեծածավալ են, սակայն նրանց ծրագրային սպասարկումը շատ պարզ է, եթե օգտագործվեն MATHEMATICA 3.0 ծրագրային փաթեթի սիմվոլիկ և հաշվողական հնարավորությունները, մասնավորապես, Ֆուրյեի արագ ձևափոխության ալգորիթմը և գործողությունների արագությունը մատրիցների հետ աշխատելիս: Ներկայացված բանաձևերը ունեն ազատության աստիճաններ, որոնք կարելի է հարմարեցնել կոնկրետ խնդրի պայմաններին:

Մանրամասն ուսումնասիրված է մի մասնավոր դեպք, ապացուցված են համապատասխան թեորեմներ, իսկ առաջարկված բանաձևերը ստուգված են բազմաթիվ օրինակների վրա: Հողվածի վերջում նկարագրված է սիպիկ օրինակներից մեկը, իսկ արդյունքները ներկայացված են աղյուսակում, որն էլ վկայում է մեթոդի արդյունավետությունը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А.Б.Нерсисян, ДНАН Армении, т.98, №1, с.23-30 (1998). ² S.Wolfram, The MATHEMATICA Book. Third Edition, Wolfram Media, 1996.