

УДК 512.55 + 512.58

Г. Г. Эмин

Характеризация строгих радикалов категории *Mod*

(Представлено академиком НАН Армении Р.Р.Варшамовым 15/XI 1997)

Рассматривается категория *Mod* – модулей над всеми кольцами. Объекты этой категории – всевозможные пары (A, U) , где U – ассоциативное кольцо, не обязательно с единицей, A – правый U -модуль. Множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар (φ_A, φ_U) , где φ_A – гомоморфизм абелевой группы A в абелеву группу B , а φ – гомоморфизм кольца U в кольцо V , причем $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$ для любых $a \in A$, $u \in U$. Такая пара называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V) . Умножение морфизмов происходит покомпонентно.

В категории *Mod* выполнены аксиомы 1-6 §1 главы 5 книги ⁽¹⁾, поэтому в категории *Mod* можно построить общую теорию радикалов в смысле Куроша ^{((2), §1, п.8)}.

Мы будем говорить, что радикал r категории *Mod* является строгим, если r -радикал $r(A, U)$ любого модуля (A, U) содержит все r -подмодули модуля (A, U) . Радикальный класс строгого радикала назовем строго радикальным классом.

Пусть L – класс объектов категории *Mod*. Обозначим через L^* класс всех таких модулей (A, U) , что любой ненулевой гомоморфный образ модуля (A, U) содержит ненулевой подмодуль, который изоморфен модулю из L . Нетрудно проверить, что условие L^* удовлетворяет условиям (P2) и (P3) §2 главы 5 книги ⁽¹⁾, поэтому L^* – радикальный класс в силу теоремы 5.2.1 книги ⁽¹⁾. Обозначим через r_L радикал, соответствующий радикальному классу L^* .

Пусть r – некоторый радикал в категории *Mod*, R – его радикальный класс, (A, U) – некоторый модуль и (B, V) – его подмодуль. Нетрудно заметить, что верна следующая

Лемма. *Радикальный класс R тогда и только тогда является строго радикальным, когда из того, что $(B, V) \in R$, следует, что идеал, порожденный (B, V) в (A, U) , содержится в $r(A, U)$.*

Теорема 1. *Радикальный класс R категории Mod тогда и только тогда является строго радикальным, когда $R = L^*$ для некоторого класса L объектов категории Mod .*

Доказательство. Пусть R — строго радикальный класс и r — радикал, соответствующий радикальному классу R . Тогда $R = R^*$.

Действительно, поскольку R замкнут относительно операции взятия гомоморфных образов, то очевидно, что $R \subseteq R^*$. Покажем, что и $R^* \subseteq R$. Предположим обратное, что $R \not\subseteq R^*$ (знак $\not\subseteq$ всюду в дальнейшем будет означать "не лежит и не равно"), т.е. что существует такой модуль $(A, U) \in R^*$, что $(A, U) \notin R$. Тогда $r(A, U) \neq (A, U)$, следовательно $(A, U) / r(A, U) \neq (O, O)$. Но тогда этот модуль как ненулевой гомоморфный образ модуля $(A, U) \in R^*$ должен содержать ненулевой r -подмодуль, что невозможно, так как $(A, U) / r(A, U)$ — r — полупростой модуль и r — строгий радикал. Получили противоречие. Значит, $R^* \subseteq R$.

Обратно. Пусть L — класс объектов категории Mod . Докажем, что радикальный класс L^* является строгим. Для этого в силу леммы достаточно доказать, что если (A, U) — некоторый модуль и (B, V) — такой подмодуль модуля (A, U) , что $(B, V) \in L^*$, то идеал $(\bar{B}, \bar{V})$ модуля (A, U) , порожденный подмодулем (B, V) , также принадлежит L^* (напомним, что $\bar{V} = V + UV + VU + UVU$, $\bar{B} = B + B \cdot U + A \cdot \bar{V}$).

Действительно, так как L^* — радикальный класс, то r_L -идеал $(\bar{B}, \bar{V})$ модуля (A, U) должен лежать в радикале $r_L(A, U)$. А чтобы показать, что $(\bar{B}, \bar{V}) \in L^*$, надо показать, что любой ненулевой гомоморфный образ модуля $(\bar{B}, \bar{V})$, т.е. любой ненулевой фактор-модуль $(\bar{B}, \bar{V}) / (C, W) = (\bar{B} / C, \bar{V} / W)$, содержит ненулевой подмодуль, изоморфный некоторому модулю из L . А для этого, так как $(B, V) \in L^*$, достаточно найти ненулевой гомоморфизм из (B, V) в $(\bar{B} / C, \bar{V} / W)$:

а) Если $(B, V) \not\subseteq (C, W)$, то отображение $b \mapsto b + C$, $b \in B$, $v \mapsto v + W$, $v \in V$, дает нам нужный ненулевой гомоморфизм.

б) Пусть $(B, V) \subseteq (C, W)$. Тогда имеем следующую цепочку: $V \subseteq W \triangleleft \bar{V} \triangleleft U$. Обозначим через $\bar{W}$ идеал, порожденный подкольцом W в кольце U . Ясно, что идеал $\bar{W}$ лежит в идеале $\bar{V} \triangleleft U$, $\bar{W} \subseteq \bar{V}$. С другой стороны, так как $V \subseteq W \subseteq \bar{W} \triangleleft U$, то идеал, порожденный подкольцом V в кольце U ,

т.е. идеал $\bar{V}$, должен лежать в идеале $\bar{W}$ кольца U , $\bar{V} \subseteq \bar{W}$. Получили, что $\bar{V} = \bar{W}$. По лемме же 1.1.5 книги (1) имеем, что $\bar{W}^3 \subseteq W$. Значит, $\bar{V}^3 \subseteq W$.

Выберем такое минимальное $n \geq 2$, что $\bar{V}^n \subseteq W$, но $\bar{V}^{n-1} \not\subseteq W$. Тогда $(V + UV)\bar{V}^{n-2} \not\subseteq W$ (если $n = 2$, то в качестве $\bar{V}^{n-2}$ возьмем кольцо $U^{(1)} = \{U, 1\}$, полученное из кольца U присоединением единицы 1).

Действительно, если $n = 2$, то $(V + UV)U^{(1)} = V + UV + VU + UVU = = \bar{V} \not\subseteq W$. Если же $n = 3$, т.е. $\bar{V}^3 \subseteq W$, но $\bar{V}^2 \not\subseteq W$, то $\bar{V}^2 = V\bar{V} + UV\bar{V} + + VU\bar{V} + UVU\bar{V} \not\subseteq W$. Поскольку $V \subseteq W$ и W — идеал кольца $\bar{V}$, то $V\bar{V} \subseteq W$. Отсюда и из того, что $\bar{V}$ — идеал кольца U , следует, что $VU\bar{V} \subseteq V\bar{V} \subseteq W$. Из тех же соображений следует, что $UVU\bar{V} \subseteq UV\bar{V}$. Получили, что $UV\bar{V}$ не лежит в W , иначе $\bar{V}^2$ лежало бы в W . Значит, $(V + UV)\bar{V} = V\bar{V} + UV\bar{V} \not\subseteq W$. Таким образом, существуют такие элементы $u \in U$, $z \in \bar{V}^{n-2}$ и такое целое число m , что $(m + u)Vz \not\subseteq W$. Рассмотрим отображение $\psi: V \rightarrow \bar{V}/W$, которое определено по следующему правилу: $\psi: v \mapsto (m + u)vz + W$ для каждого $v \in V$. Легко проверить, что отображение ψ определено корректно и что $\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2)$. Покажем, что $\psi(v_1 v_2) = \psi(v_1)\psi(v_2) = 0 + W$. Действительно, для любых $v_1, v_2 \in V$ имеем, что $(m + u)v_1 v_2 z \in U^{(1)}V^2\bar{V}^{n-2} \subseteq \bar{V}^n \subseteq W$ и $(m + u)v_1 z(m + u)v_2 z \in U^{(1)}V\bar{V}^{n-2}U^{(1)}V\bar{V}^{n-2} \subseteq \bar{V}^n \subseteq W$. Таким образом, отображение ψ является гомоморфизмом колец и так как $(m + u)Vz \not\subseteq W$, то ψ — ненулевой гомоморфизм.

Рассмотрим пару отображений (φ, ψ) , где $\varphi: b \mapsto b + C$, $b \in B$. Так как $\varphi: B \mapsto \bar{B}/C$ — нулевой гомоморфизм абелевых групп, то пара (φ, ψ) удовлетворяет условию полулинейности. Таким образом, пара (φ, ψ) является ненулевым гомоморфизмом категории *Mod*. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть L — класс модулей и (A, U) — некоторый модуль. Если L замкнут относительно операции взятия гомоморфных образов, то (A, U) тогда и только тогда будет r_L -полупростым модулем, когда в (A, U) нет ненулевых подмодулей из L .

Доказательство. Пусть (A, U) — r_L -полупростой модуль. Так как r_L — строгий радикал, то в (A, U) нет ненулевых подмодулей из L^* . Значит, в (A, U) нет ненулевых подмодулей и из L , так как из того, что класс L замкнут относительно операции взятия гомоморфных образов, следует, что $L \subseteq L^*$.

Обратно. Пусть в модуле (A, U) нет ненулевых подмодулей из L . Предположим обратное, что модуль (A, U) не является r_L -полупростым. Тогда

существует такой ненулевой идеал (C, W) модуля (A, U) , что $(C, W) \in L^*$. Рассмотрим гомоморфизм $(1_C, 1_W): (C, W) \rightarrow (C, W)$. Так как $(C, W) \in L^*$, то по определению L^* в (C, W) должен существовать ненулевой подмодуль $(B, V) \in L$. Получили противоречие, так как любой подмодуль модуля (C, W) является также и подмодулем модуля (A, U) .

Следствие 2. Пусть L – класс модулей и (A, U) – некоторый модуль. Если L – радикальный класс, то модуль (A, U) тогда и только тогда будет r_L -полупростым модулем, когда любой подмодуль модуля (A, U) является r_L -полупростым модулем.

Доказательство. Так как L замкнут относительно операции взятия гомоморфных образов, то $L \subseteq L^*$.

Пусть модуль (A, U) является r_L -полупростым и (B, V) – некоторый подмодуль модуля (A, U) . Так как r_L – строгий радикал, то подмодуль r_L -полупростого модуля (A, U) также будет r_L -полупростым, следовательно, в силу следствия 1, в подмодуле (B, V) нет ненулевых подмодулей, а следовательно и идеалов из L . Значит, подмодуль (B, V) – r_L -полупрост.

Обратно. Пусть любой подмодуль модуля (A, U) является r_L -полупростым модулем. Предположим обратное, что модуль (A, U) не является r_L -полупростым. Тогда существует такой ненулевой идеал (C, W) модуля (A, U) , что $(C, W) \in L^*$. Но в этом случае, как это уже было при доказательстве следствия 1, существует ненулевой подмодуль модуля (A, U) , принадлежащий L . Получили противоречие. Следствие доказано.

Пусть M – произвольный класс объектов категории Mod , удовлетворяющий условию, что любой ненулевой идеал модуля из M гомоморфно отображается на некоторый ненулевой модуль из M . Тогда класс M^{-1} всех модулей, не отображающихся гомоморфно ни на один ненулевой модуль из M , радикален в смысле Куроша (см. (1), с.418). Радикал S_M , соответствующий радикальному классу M^{-1} , называется верхним радикалом, определенным классом M .

Следствие 3. Радикальный класс R тогда и только тогда будет строго радикальным, когда R – верхний радикальный класс, определяемый замкнутым относительно операции взятия подмодулей классом M объектов категории Mod .

Доказательство. Сравнивая определения верхнего радикального класса, определенного классом M и радикального класса L^* , где L – класс всех таких модулей, которые не лежат в M , видим, что если M является классом, замкнутым относительно операции взятия подмодулей, то верхний радикальный класс M^{-1} , определенный классом M , совпадает с радикальным

классом L^* . Значит, если R – верхний радикальный класс, определенный замкнутым относительно операции взятия подмодулей классом M объектов категории Mod , то в силу теоремы 1 R – строго радикальный класс.

Обратно. Пусть R – строго радикальный класс. Тогда $R = R^*$. Пусть r – строгий радикал, соответствующий строго радикальному классу R , и M – полупростой класс для радикала r . Так как r – строгий радикал, то класс M замкнут относительно операции взятия подмодулей. Значит, как мы уже показали выше, $M^{-1} = L^*$, где L – класс всех таких модулей, которые не лежат в M . Покажем, что $L^* = R^*$.

Действительно, из включения $R \subseteq L$ следует, что $R^* \subseteq L^*$. Покажем теперь, что $L^* \subseteq R^*$.

Пусть модуль $(A, U) \in L^*$, тогда любой ненулевой гомоморфный образ модуля (A, U) содержит ненулевой подмодуль $(B, V) \in L$. Значит, модуль (B, V) не является r -полупростым, следовательно, (B, V) содержит некоторый ненулевой r -подмодуль, т.е. подмодуль, который изоморфен некоторому модулю из R . Получили, что модуль $(A, U) \in R^*$, т.е. что $L^* = R^*$. Выше мы уже доказали, что $R = R^*$ и $L^* = M^{-1}$. Значит, $R = M^{-1}$, где M – замкнутый относительно операции взятия подмодулей класс. Следствие доказано.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении

Գ. Գ. ԷՍԻՆ

Mod կատեգորիայի խիստ սադիկալների բնութագրումը

Գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որպեսզի սադիկալային դասը լինի խիստ սադիկալային, այսինքն՝ Կուրոշի իմաստով խիստ սադիկալի սադիկալային դաս *Mod* կատեգորիայում՝ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում, որի օբյեկտները բոլոր (A, U) զույգերն են (U -ն ասոցիատիվ օղակ է, A -ն՝ աջ U -ն մոդուլ), իսկ մորֆիզմները՝ հոմոմորֆիզմների բոլոր այնպիսի (φ_A, φ_U) զույգերը, որ $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$, $a \in A$, $u \in U$, որտեղ φ_A -ն աբելյան խմբերի կատեգորիայի հոմոմորֆիզմ է, իսկ φ_U -ն՝ ասոցիատիվ օղակների: Մասնավորապես, որպեսզի սադիկալային R դասը լինի խիստ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ R -ը լինի վերին սադիկալային դաս, որը կազմավորվում է ենթամոդուլների վերջման գործողության նկատմամբ փակ, *Mod* կատեգորիայի օբյեկտների որևիցե M դասով:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В.А.Андрунакиевич, Ю.М.Рябухин, Радикалы алгебр и структурная теория, М., Наука, 1979. ² Е.Г.Шульгейфер, Сиб. матем. журн., т.7, №6, с.1412-1421 (1966).