

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:534.1

С. А. Мелкумян

**Симметричная контактная задача электроупругости
для пьезокерамической полуплоскости с вертикальным
полубесконечным разрезом**

(Представлено академиком НАН Армении Г. Е. Багдасаряном 25/IX 1997)

Рассматривается плоская симметричная контактная задача электроупругости для упругой пьезокерамической полуплоскости ($z \geq 0$) с вертикальным полубесконечным разрезом ($z \geq b$). На конечном участке границы ($|x| \leq a$) полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разреза ($x = 0$). Предполагается, что направление предварительной поляризации перпендикулярно к границе ($z = 0$) и трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Принимается, что полуплоскость граничит с вакуумом и имеет заряженное электродное покрытие только под штампом. Для простоты принимается также, что на границе полуплоскости вне штампа и на берегах полубесконечного разреза действуют только внешние нормальные затухающие механические напряжения. Рассматривается плоское деформированное состояние ($|y| < \infty$). Так как задача симметрична относительно оси вертикального разреза, то можно ограничиться рассмотрением только правого квадранта ($0 < x < \infty, 0 < z < \infty$). Известно, что поставленная электроупругая задача математически сводится к решению уравнений равновесия (1.72), электростатики (1.73) и состояния сред (1.74), а также соотношений Коши (1.75) работы (1), со следующими граничными условиями:

$$\tau_{zx}(x, 0) = 0, 0 < x < \infty; \tau_{xz}(0, z) = 0; D_x(0, z) = 0, 0 < z < \infty; \quad (1)$$

$$U_z(x, 0) = f_1(x); \psi(x, 0) = V_0, 0 \leq x \leq a; \quad (2)$$

$$\sigma_z(x, 0) = f_2(x); D_z(x, 0) = 0, a < x < \infty; \quad (3)$$

$$U_x(0, z) = 0, 0 \leq z \leq b; \sigma_x(0, z) = f_3(x), b < z < \infty, \quad (4)$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ – компоненты тензора механических напряжений, U_x, U_z – проекции вектора упругих перемещений, D_x, D_z – компоненты вектора электрической индукции, ψ – электрический потенциал. В качестве основных неизвестных функций выбраны упругие перемещения ($U_x(x, z), U_z(x, z)$) и электростатический потенциал ($\psi(x, z)$).

Решения задачи ищем в виде суммы интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} U_x(x, z) &= \frac{1}{C_{11}^E} \int_0^\infty \alpha \bar{U}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha - \frac{1}{C_{11}^E} \int_0^\infty \beta \bar{U}(\beta, z) \sin \beta x d\beta; \\ U_z(x, z) &= \frac{1}{C_{44}^E} \int_0^\infty \alpha \bar{W}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{C_{44}^E} \int_0^\infty \beta \bar{W}(\beta, z) \cos \beta x d\beta; \\ \psi(x, z) &= -\frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \alpha \bar{\psi}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha - \frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \beta \bar{\psi}(\beta, z) \cos \beta x d\beta; \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_1(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \quad \bar{U}(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{W}(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 \Delta_2(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \quad \bar{W}(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 \Delta_2(t_k) B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{\psi}(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 \Delta_3(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \quad \bar{\psi}(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$ – неизвестные функции интегрирования, которые необходимо определить из граничных условий (1)–(4).

$\Delta_1(t_k), \Delta_2(t_k), \Delta_3(t_k)$ определяются по формулам:

$$\Delta_1(t_k) = \chi t_k^2 + \chi_1; \quad \Delta_2(t_k) = \eta t_k^4 + \eta_1 t_k^2 + 1; \quad \Delta_3(t_k) = \gamma t_k^4 + \gamma_1 t_k^2 + 1, \quad (7)$$

причем

$$\begin{aligned} \chi &= \left(\frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} - \left(\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \frac{e_{33}}{e_{15}}; \quad \chi_1 = \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} - \frac{e_{31}}{e_{15}}; \\ \eta &= \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \cdot \frac{e_{33}}{e_{15}}; \quad \eta_1 = \left(\frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \left(\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} + \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \right) - \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} - \frac{e_{33}}{e_{15}}; \\ \gamma &= \frac{c_{33}^E}{c_{11}^E}; \quad \gamma_1 = \left(\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \left(\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} + \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \right) - \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E}, \end{aligned} \quad (8)$$

а t_k^2 – корни бикубического уравнения

$$t^6 - Pt^4 + Qt^2 - R = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu \right)^{-1} \left[\left(\frac{e_{31}}{c_{11}^E} + \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \right) \chi - \frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta_1 + \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \eta - \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu_1 + \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \nu \right]; \\ Q &= \left(\frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu \right)^{-1} \left[\frac{e_{33}}{c_{44}^E} + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} - \left(\frac{e_{31}}{c_{11}^E} + \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \right) \chi_1 - \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \eta_1 - \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \nu_1 \right]; \\ R &= \left(\frac{e_{33}}{c_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \nu \right)^{-1} \left(\frac{e_{15}}{c_{44}^E} + \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

В этих соотношениях $c_{11}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ — модули упругости материала при нулевом электрическом поле, e_{11}, e_{33}, e_{15} — пьезомодули, $\varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{33}^s$ — диэлектрические проницаемости при нулевой деформации.

Отметим, что относительно t^2 кубическое уравнение (9) имеет три корня, причем известно, что один из них действителен, а два других в общем случае — комплексно сопряженные. Положительные корни уравнения (9) для пьезокерамики марки PZF4 следующие: $t_1 = 1,204$, $t_{2,3} = 1,069 \pm 10,200$.

Используя основные соотношения теории электроупругости (1) и учитывая (5), (6), можно все компоненты электроупругого поля выразить через $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, z) &= \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\sigma}_x(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^\infty \beta^2 \bar{\sigma}_x(\beta, x) \sin \beta z d\beta; \\ \sigma_z(x, z) &= \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\sigma}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^\infty \beta^2 \bar{\sigma}_z(\beta, x) \sin \beta z d\beta; \\ \tau_{zx}(x, z) &= - \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\tau}_{zx}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha - \int_0^\infty \beta^2 \bar{\tau}_{zx}(\beta, x) \cos \beta z d\beta; \\ D_x(x, z) &= - \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \int_0^\infty \alpha^2 \bar{D}_x(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha - \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \int_0^\infty \beta^2 \bar{D}_x(\beta, x) \cos \beta z d\beta; \\ D_z(x, z) &= \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \int_0^\infty \alpha^2 \bar{D}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \frac{e_{15}}{c_{11}^E} \int_0^\infty \beta^2 \bar{D}_z(\beta, x) \sin \beta z d\beta; \\ E_x(x, z) &= - \frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \alpha^2 \bar{E}_x(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha - \frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \beta^2 \bar{E}_x(\beta, x) \cos \beta z d\beta; \end{aligned} \quad (11)$$

$$E_z(x, z) = -\frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \alpha^2 \bar{E}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha - \frac{1}{e_{15}} \int_0^\infty \beta^2 \bar{E}_z(\beta, x) \sin \beta z d\beta,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \left[\Delta_1(t_j) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \\ \bar{\sigma}_x(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \left[\Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{\sigma}_z(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_j) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \\ \bar{\sigma}_z(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{\tau}_{zx}(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 \left[\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_j) t_j^2 + \Delta_2(t_j) - \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \\ \bar{\tau}_{zx}(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) t_k + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} - \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k} \right] B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{D}_x(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 \left[\Delta_1(t_j) t_j^2 + \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{c_{11}^E}{e_{15}} \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \\ \bar{D}_x(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \left[\Delta_1(t_k) t_k + \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} + \frac{c_{11}^E}{e_{15}} \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k} \right] B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{D}_z(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_j) - \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_2(t_j) - \frac{c_{11}^E}{e_{15}} \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; \\ \bar{D}_z(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_2(t_k) - \frac{c_{11}^E}{e_{15}} \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{E}_x(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 \Delta_3(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; & \bar{E}_x(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k} B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}; \\ \bar{E}_z(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_3(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z}; & \bar{E}_z(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) B_k(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Удовлетворяя (1), получим (2):

$$B_k(\beta) = b_k B_1(\beta); \tag{13}$$

$$A_j(\alpha) = a_j^{(1)} A_1(\alpha) + a_j^{(2)} A_2(\alpha) + \frac{d_j}{\alpha} \sum_{k=1}^3 t_k^2 b_{1k} b_k \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta. \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_1 &= 1; b_2 = \frac{b_{13}b_{21} - b_{11}b_{23}}{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}; b_3 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}; \\ a_1^{(1)} &= 1; a_1^{(2)} = 0; d_1 = 0; a_2^{(1)} = 0; a_2^{(2)} = 1; d_2 = 0; \\ a_3^{(1)} &= -\frac{a_{11}}{a_{13}}; a_3^{(2)} = -\frac{a_{12}}{a_{13}}; d_3 = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{a_{13}}; \\ b_{1k} &= \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} - \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k}; \\ b_{2k} &= \Delta_1(t_k) t_k + \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} + \frac{c_{11}^E}{e_{15} e_{15}} \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k}; \\ a_{1j} &= \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_j) t_j^2 + \Delta_2(t_j) - \Delta_3(t_j). \end{aligned} \quad (15)$$

Имея в виду (13), (14), удовлетворяя (2)-(4), получаем следующие системы из парных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \beta B_1(\beta) \sin \beta z d\beta = 0 & 0 \leq z \leq b \\ \int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta) \sin \beta z d\beta = \frac{1}{m_{12}} f_3(z) - \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{2j} \int_0^\infty \alpha^2 A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z} d\alpha & b < z < \infty \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \alpha [m_{11} A_1(\alpha) + m_{12} A_2(\alpha)] \cos \alpha x d\alpha = c_{44}^E f_1(x) - \\ - \sum_{k=1}^3 b_{1k} b_k \int_0^\infty \beta B_1(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}} d\beta & 0 \leq x \leq a \\ \int_0^\infty \alpha^2 [m_{21} A_1(\alpha) + m_{22} A_2(\alpha)] \cos \alpha x d\alpha = f_2 x - \\ - m_{23} \sum_{k=1}^3 t_k^2 b_{1k} b_k \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta & a < x < \infty \end{cases} \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \alpha [m_{31} A_1(\alpha) + m_{32} A_2(\alpha)] \cos \alpha d\alpha = -e_{15} V_0 - \\ & - \sum_{k=1}^3 b_{1k}^{**} b_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{-\frac{\beta x}{t_k}} d\beta \quad 0 \leq x \leq a \\ & \int_0^{\infty} \alpha^2 [m_{41} A_1(\alpha) + m_{42} A_2(\alpha)] \cos \alpha d\alpha = \\ & = m_{43} \sum_{k=1}^3 t_k^2 b_{1k} b_k \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta \quad a < x < \infty \end{aligned} \right. \quad (18)$$

где

$$n_{12} = \sum_{k=1}^3 b_{3k} b_k; \quad b_{1k}^* = \frac{\pi}{2} m_{13} t_k b_{1k} + A_2 t_k; \quad b_{1k}^{**} = \frac{\pi}{2} m_{33} t_k b_{1k} + A_3 t_k;$$

$$\begin{Bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_{3j} \begin{Bmatrix} a_j^{(1)} \\ a_j^{(2)} \\ d_j \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \Delta_3(t_j) \begin{Bmatrix} a_j^{(1)} \\ a_j^{(2)} \\ d_j \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} m_{41} \\ m_{42} \\ m_{43} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_{4j} \begin{Bmatrix} a_j^{(1)} \\ a_j^{(2)} \\ d_j \end{Bmatrix};$$

$$b_{3k} = \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) + \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_k);$$

$$a_{2j} = t_j \left[\Delta_1(t_j) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] \quad (19)$$

$$a_{3j} = t_j \left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_j) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right];$$

$$a_{4j} = t_j \left[\frac{c_{31}^E}{c_{15}^E} \Delta_1(t_j) - \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_2(t_j) + \frac{c_{11}^E}{e_{15}} \frac{e_{33}^s}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right].$$

Решая парное уравнение (16) методом преобразующих операторов (3), получаем

$$B_1(\beta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_b^{\infty} r \varphi_3(r) J_0(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_b^{\infty} r F_1(r) J_0(\beta r) dr. \quad (20)$$

Здесь

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{n_{12}} \int_r^{\infty} \frac{f_3(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz, \quad (21)$$

$$F_1(r) = -\frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{2j} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_j(\alpha) K_0(\alpha r) d\alpha, \quad (22)$$

$J_\nu(\beta r)$ – функция Бесселя первого рода с действительным аргументом,
 $K_0(\alpha r)$ – функция Макдональда.

После некоторых простых преобразований, решая систему парных уравнений (17) и (18) методом преобразующих операторов (4), имеем

$$A_q(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_0^a t \varphi_q(t) J_1(\alpha t) dt + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_a^{\infty} t \varphi_q^*(t) J_1(\alpha t) dt + \\ + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_0^a t \Psi_q(t) J_1(\alpha t) dt + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_a^{\infty} t \Phi_q(t) J_1(\alpha t) dt; \quad (q=1,2), \quad (23)$$

где

$$\varphi_q(t) = -\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f_q^*(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx; \quad \varphi_q^*(t) = -\frac{1}{t} \int_t^{\infty} \frac{x f_q^{**}(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx; \quad (24)$$

$$\Psi_q(t) = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{c_{qk}}{t_k} \int_0^{\infty} \beta^2 \left[I_1\left(\frac{\beta}{t_k} t\right) - L_1\left(\frac{\beta}{t_k} t\right) - \frac{2}{\pi} \right] B_1(\beta) d\beta; \quad (25)$$

$$\Phi_q(t) = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^3 \frac{c_{qk}^*}{t_k^2} \int_0^{\infty} \beta^2 \left[I_1\left(\frac{\beta}{t_k} t\right) - L_1\left(\frac{\beta}{t_k} t\right) - \frac{2}{\pi} \right] B_1(\beta) d\beta; \quad (26)$$

$$f_1^*(x) = \frac{c_{44}^E m_{32} f_1(x) + m_{12} e_{15} V_0}{m_{11} m_{32} - m_{12} m_{31}}; \quad f_1^{**}(x) = \frac{m_{42} f_2(x)}{m_{21} m_{42} - m_{22} m_{41}}; \quad (27)$$

$$f_2^*(x) = \frac{c_{44}^E m_{31} f_1(x) + m_{11} e_{15} V_0}{m_{12} m_{31} - m_{11} m_{32}}; \quad f_2^{**}(x) = \frac{m_{41} f_2(x)}{m_{22} m_{41} - m_{21} m_{42}};$$

$$c_{1k} = \frac{m_{12} b_{1k}^{**} - m_{32} b_{1k}^{**}}{m_{11} m_{32} - m_{12} m_{31}} b_k; \quad c_{2k} = \frac{m_{11} b_{1k}^{**} - m_{31} b_{1k}^{**}}{m_{12} m_{31} - m_{11} m_{32}} b_k; \quad (28)$$

$$c_{1k}^* = \frac{m_{22} m_{43} - m_{23} m_{42}}{m_{21} m_{42} - m_{22} m_{41}} t_k^2 b_{1k} b_k; \quad c_{2k}^* = \frac{m_{21} m_{43} - m_{23} m_{41}}{m_{22} m_{41} - m_{21} m_{42}} t_k^2 b_{1k} b_k.$$

Имея в виду (22), (14), (25), (26), исключая $A_q(\alpha)$ из (20) и (23), для определения $B(\beta) = \beta B_1(\beta)$ получаем интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода:

$$B(\beta) = \Omega(\beta) + \int_0^{\infty} K(\gamma, \beta) B(\gamma) d\gamma. \quad (29)$$

По причине громоздкости формулы определение $\Omega(\beta)$ и $K(\gamma, \beta)$ здесь не приведено.

Для пьезокерамики PZF4 доказана разрешимость уравнения (29). Решая (29) методом последовательных приближений, определяем $B(\beta) = \beta B_1(\beta)$, далее по формулам (26), (25), (23), (14), (22), (20) и (13) определяем все искомые функции.

Используя формулы (12), (11), (6) и (5), можно определить все компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке полуплоскости.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Կիսաանվերջ ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված պիեզակերամիկական կիսահարթության համաչափ կոնտակտային էլեկտրաառաձգականության խնդիրը

Դիտարկվում է էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ համաչափ կոնտակտային խնդիրը կիսաանվերջ ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված, վակուումին սահմանակցող պիեզակերամիկական կիսահարթության համար, երբ վերջինս ունի լիցքավորված էլեկտրոդային ծածկույթ միայն դրոշմի տակ: Կիսահարթության եզրում, ճեղքի առանցքին համաչափ, վերջավոր երկարության վրա ճնշում է ցանկացած ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմը: Ենթադրվում է, որ պիեզակերամիկայի նախնական բեռնացման ուղղությունը ուղղահայաց է կիսահարթության եզրին, ինչպես նաև դրոշմի և կիսահարթության միջև շփման ուժերը բացակայում են: Դիտարկվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակի խնդիր:

Օգտվելով «գույգ» ինտեգրալ հավասարումների մեթոդից՝ խնդրի լուծումը բերվել է Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման, որի լուծելիությունը ցույց է տրված PZF4 մականիշի պիեզակերամիկայի համար:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, Н.А.Шульга, Электроупругость, Киев, Наукова думка, 1989. ² И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Изд. физ.-мат. лит., 1971. ³ В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян, Изв. АН АрмССР, Механика, т.24, №4, с.3-15 (1971). ⁴ В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян, ДАН АрмССР, т.51, №3, с.144-149 (1970).