

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.62, 519.64, 519.65

Академик НАН Армении А. Б. Нерсисян

Параметрическая аппроксимация и некоторые ее применения

(Представлено 18/XI 1997)

Предлагается схема, позволяющая, в частности, обобщить некоторые известные аппроксимационные (интерполяционные) формулы. Выбор параметров предоставляет возможность адаптироваться к конкретным задачам. Приведены некоторые применения.

Численная реализация проведена применением символьных и вычислительных возможностей системы MATHEMATICA 3.0 (1).

1. Пусть $\{\alpha_n\}, \|\alpha_n\| = 1 (n = 0, \pm 1, \dots)$ – базис на банаховом пространстве B и $(\varphi_k, \cdot) (k = 1, 2, \dots, N)$ – некоторый набор функционалов из B^* . Пусть, далее, $\{\theta_n\} = \{\theta_n(N)\} (n = 0, \pm 1, \dots)$ – действительная последовательность такая, что $\sum |\theta_n| < +\infty$. Имея в виду приближенное представление элемента $f \in B$ по формуле

$$f \cong f_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N (\varphi_k, f) a_k, \{a_k\} \subset B, \quad (1)$$

где $\{a_k\}$ от f не зависят, рассмотрим остаточный член

$$R_N(f) \stackrel{\text{def}}{=} f - \sum_{k=1}^N (\varphi_k, f) a_k \quad (2)$$

и следующую задачу минимизации (безусловной или условной) функционала $I(a) (a = (a_1, \dots, a_N))$

$$I(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \|R_N(\alpha_n)\|^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Если решение этой задачи существует (хотя бы локально), то естественно поставить вопрос о поведении $\|R_N(f)\|$ при $N \rightarrow \infty$. В случае, когда $B = H$ – гильбертово пространство, нетрудно видеть, что эта задача связана с решением системы линейных уравнений с матрицей $M = \|m_{ps}\| (p, s = 1, 2, \dots, N)$

$$m_{ps} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(\varphi_s, \alpha_n) \overline{(\varphi_p, \alpha_n)}. \quad (4)$$

Если матрица M положительно определенная, то безусловная минимизация (3) имеет единственное решение, а формула (1), как легко убедиться, — интерполяционная (т.е. $(\varphi_k, f) = (\varphi_k, f_N)$, $k = 1, 2, \dots, N$).

Расширив постановку, можно рассматривать необязательно ограниченные функционалы (φ_k, \cdot) , заданные на всюду плотном множестве $(B_0 \subset B (\overline{B_0} = B))$, при $\{\alpha_n\} \subset B_0$. Что же касается условного минимума в (3), то можно, например, потребовать, чтобы формула (1) была точной для некоторого конечного выбора $\{\psi_k\} \subset B_0$, ($k = 1, 2, \dots, p$; $p \ll N$).

2. Пусть теперь B — банахово пространство отображений $f: \overline{D} \rightarrow B_1$, где D — область из R^m , $m \geq 1$, а B_1 — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_1$. В этом случае параметры θ_n могут зависеть, кроме N , от x , задача (3) ставится при любом зафиксированном $x \in \overline{D}$, а коэффициенты $\{a_k\}$ будут функциями со значениями в B_1 .

Рассмотрим подробнее последнюю схему в случае $D = (-1, 1)$, $B_1 = C$, $B = L_2(-1, 1)$, $B_0 = C[-1, 1]$, $\{\alpha_n\} = \{e^{i\pi n x}\}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) и $(\varphi_k, f) = f(x_k)$, где $\{x_k\} \subset [-1, 1]$ — некоторая сеть разных точек ($k = 0, 1, 2, \dots, 2N$).

Теорема 1. Пусть $\{\theta_n\} \subset B_0$, $\theta_n(x) \geq 0$ ($\forall n$), и для каждой точки $x \in [-1, 1]$ существуют, по крайней мере, $(2N + 1)$ разных индексов n_p таких, что $\theta_{n_p} > 0$ ($p = 0, 1, \dots, 2N$). Тогда безусловная задача (3) однозначно разрешима.

Доказательство следует из положительной определенности матрицы (4), соответствующей необходимым условиям функционала $I(a)$.

Пусть теперь $\{x_k\}$ — равномерная сеть: $x_k = \frac{2(k - N)}{2N + 1}$, $k = 0, 1, \dots, 2N$ и $\theta_n = \theta_n(x)$. Обозначим

$$d_n = d_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \theta_{n+(2N+1)r}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (5)$$

Теорема 2. Если функции $\{d_n\}$ положительны на $[-1, 1]$, то единственным решением безусловной задачи (3) является вектор-функция $a = (a_0, \dots, a_{2N})$, где

$$a_k(x) = \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_n(x)}{d_n(x)} \exp(i\pi n(x - x_k)) \quad (6)$$

Доказательство основано на том обстоятельстве, что матрица (4) является положительно определенным циркулянтном и, следовательно, допускает явное обращение.

Теорема 3. Пусть $f \in C^1[-1,1]$, $f(1) = f(-1)$, $\theta_n / d_n \geq 0$ ($n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$) и

$$\left| 1 - \frac{\theta_n}{d_n} \right| \leq \varepsilon_n(N), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |f_n| \varepsilon_n(N) = 0, \quad (7)$$

где f_n — коэффициенты Фурье f . Тогда $R_N(f) \rightarrow 0$ равномерно по x ($N \rightarrow \infty$).

Доказательство проводится прямой оценкой, основанной на применении формулы (6).

С параметрами θ_n ассоциируется следующая ортогональная система $\{\varphi_n\}$.

Теорема 4. Если $\{\theta_n\}$ от x не зависят, то интерполяционная формула (1) является точной для ортонормальной системы $\{\varphi_n\}$, $|n| \leq N$.

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \theta_{n+(2N+1)r} \exp(i\pi(n+(2N+1)r)x), \quad (8)$$

где $\omega_n^2 = 2 \sum_s |\theta_{n+(2N+1)s}|^2$.

Доказательство основано на непосредственной проверке.

Поведение разложений по системе $\{\varphi_n\}$ рассмотрим в более общей ситуации (см. выше, п.1). Пусть $\{\theta_n\} \in \mathbb{C}$ ($\theta_n = \theta_n(N)$, $n = 0, \pm 1, \dots$) и $\sum |\theta_n|^2 = 1$. Разложение

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad f \in H, \quad \varphi_n = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \theta_{n+(2N+1)r} \alpha_{n+(2N+1)r} \quad (9)$$

очевидно, ортогональное.

Теорема 5. Для того чтобы $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f) \rightarrow f$, для любого $f \in H$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\theta_n(N)|^2 = 1, \quad (n = \text{const}). \quad (10)$$

Доказательство основано на прямой оценке для $S_N(\alpha_m)$, ($m = \text{const}$, $N \rightarrow \infty$).

Замечание 1. Суммы $S_N(f)$ являются проекцией f на $(2N+1)$ -мерное подпространство $l_N \subset H$, натянутое на ортогональный базис $\{\varphi_n\}$. Однако следует иметь в виду, что включение $l_{N_1} \subset l_{N_2}$ ($N_2 > N_1$), вообще говоря, неверно, даже если $N_2 = N_1 N_3$. Отметим также, что всюду выше нечетное число $(2N+1)$ введено ради удобства и его можно заменить произвольным целым числом.

3. Свобода выбора параметров $\{\theta_n\}$ в предыдущем пункте позволяет строить обширный класс интерполяционных формул. Все они непосредственно связаны со следующими функциями:

$$b_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(x) e^{i\pi n(x-x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N. \quad (11)$$

При $\{\theta_n\}$, не зависящих от x , $\{b_k(x)\}$ являются сдвигами одной и той же функции $b_0(x)$.

Замечание 2. Параметры $\{\theta_n\}$ могут выбраны так, чтобы функции $\{b_k(x)\}$ имели локальные носители. Отметим аналогию здесь с вейвлетами (см. (2)).

Имеют место следующие формулы

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^{2N} h_k(x) b_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \theta_n(x) e^{i\pi n x} / d_n(x), \quad (12)$$

где

$$h_k(x) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{s=0}^{2N} G(k-s, x) f(x_s), \quad (13)$$

$$G(s, x) = \sum_{p=-N}^N \exp\left(\frac{2i\pi p s}{2N+1}\right) / d_p(x), \quad F_n(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N f(x_k) e^{-i\pi n x_k}.$$

Если $\{\theta_n\}$ от x не зависят, имеем

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{s=0}^{2N} e^{i\pi n x_s} b_0(x-x_s), \quad f_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{F_n}{d_n} \varphi_n(x) = \sum_{s=0}^{2N} g_s b_0(x-x_s), \quad (14)$$

$$S_N(f) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{s=0}^{2N} c_s b_0(x-x_s),$$

где

$$g_s = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \frac{F_n}{d_n} e^{i\pi n x_s}, \quad c_s = \sum_{r=-N}^N \mu_{s-r} \tilde{f}_r, \quad (15)$$

$$\mu_k = \sum_{n=-N}^N e^{i\pi n x_k} / \omega_n^2, \quad \tilde{f}_r = \int_{-1}^1 f(t) \overline{b(t-x_r)} dt.$$

Эти соотношения обеспечивают эффективную численную реализацию изучаемых аппроксимационных формул на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Замечание 3. Пусть D - m -мерный квадрат ($t \in D \Leftrightarrow t = (t_1, \dots, t_m), |t_k| \leq 1, k = 1, \dots, m$). Тогда результаты п.2-3 сохраняют свою силу в случае сети

$$t_k = \left(\frac{2(k_1 - N_1)}{2N_1 + 1}, \dots, \frac{2(k_m - N_m)}{2N_m + 1} \right); \quad k_i = 0, 1, \dots, 2N_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

системы $\{\alpha_n\} = \{e^{i\pi(n,x)}\}$ и параметров $\{\theta_n\}$, если все формулировки перефразировать в терминах мультииндексов ($n = (n_1, \dots, n_m)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $(n, x) = \sum n_k x_k$).

4. Система $\{\varphi_n\}$ является интерполяцией классической системы Фурье по формулам (1) + (6). Поэтому разложение $S_N(f)$ (см.(9)) можно рассматривать как приближенный ряд Фурье для f . Суммы $S_N(f)$ аналогичны суммам, возникающим при суммировании рядов. Подчеркнем, однако, что процесс $S_N(f)$ при $N \rightarrow \infty$ не является суммированием в общепринятом смысле (см. (3)).

Остановимся вкратце на некоторых типичных частных случаях. Пусть, например:

$$\text{а) } \theta_n = 1 - \frac{|n|}{2N+1} (|n| \leq 2N) \text{ и } \theta_n = 0 (|n| > 2N);$$

$$\text{б) } \theta_n = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2(2N+1)}\right) (|n| \leq 2N) \text{ и } \theta_n = 0 (|n| > 2N);$$

$$\text{в) } \theta_n = r^{|n|} (0 < r < 1).$$

Нетрудно видеть, что суммы $S_N(f)$ для случаев а) и б) аналогичны соответственно методам суммирования Чезаро и Бернштейна-Рагозинского. Особенно интересен случай в), соответствующий методу Абеля. Этот случай находит применение при решении интегральных уравнений Вольтерра по схеме работы (4). Здесь же опишем алгоритм, позволяющий эффективно вычислять коэффициенты ряда Фурье.

Именно, заметим, что при $\theta_n = r^{|n|}$ ($0 < r < 1$, $n = 0, \pm 1, \dots$), где r от x не зависит,

$$b_0(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \pi x + r^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad (17)$$

что позволяет (см. (14)) при вычислении коэффициентов Фурье функции $f(x)$ ограничиться интегралами от произведения функции f на соответствующие сдвиги функции (17), а затем использовать БПФ. Таблица содержит результаты численного эксперимента по вычислению коэффициентов Фурье простой функции $f(x) = x + e^x$ на отрезке $[-1, 1]$. В данном случае $r = r(N) \rightarrow 1$ и $r^N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), что обеспечивает устойчивый счет.

Предлагаемый здесь метод работает гораздо быстрее обычного численного интегрирования для коэффициентов, поскольку отсутствуют быстро осциллирующие гармоники (функция (17) может иметь только один пик). Отметим, однако, что это преимущество возникает лишь при достаточно большом N и при вычислении всех коэффициентов частичной суммы Фурье, а не отдельно взятых.

N	301	401	501	601	701	801	901
ε_1	$6,4 \cdot 10^{-12}$	$7,8 \cdot 10^{-12}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$
ε_2	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-5}$
t_1 / t_2	5,5	6,9	7,6	8,3	10	11,8	8,2

N – число вычисляемых коэффициентов Фурье функции $x + e^x$ для гармоник в интервале $[-(N - 1)/2, (N - 1)/2]$, t_1 и ε_1 – соответственно время и среднеквадратичная погрешность при прямом численном интегрировании, t_2 и ε_2 – посредством предлагаемого метода.

В обоих случаях (при прямом интегрировании и при счете посредством функции (17)) численное интегрирование проводилось в одном и том же режиме. Обращает на себя внимание гораздо большая стабильность уровня ошибки во втором случае.

5. Подход п.1 может быть применен при решении определенных типов операторных уравнений. В рамках схемы п.2,3 рассмотрим уравнения с оператором L , формально обладающим (см. замечание 2) свойством

$$Le^{inx} = l_n e^{inx}, \quad (18)$$

где коэффициенты l_n от x не зависят (см. также замечание 3).

Здесь мы остановимся на конкретном примере системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$Ly(x) \stackrel{\text{def}}{=} Ay'' + By' + Cy = f(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (19)$$

где A, B, C – постоянные матрицы порядка $p \geq 1$, $f(x)$ – заданная вектор-функция. Очевидно, условие (18) выполнено. Рассмотрим простейшую краевую задачу $y(-1) = u$ и $y(1) = v$ и предположим, что она поставлена корректно. Хотя задача эта, с теоретической точки зрения, явно решается (если считать, что корни характеристического полинома найдены), на практике найти решение отнюдь непросто. А в случае, когда A, B, C или f зависят от параметров, эффективное получение приближенного решения и вовсе проблематично. Схема п.2 позволяет, в ряде случаев, обойти эти трудности.

Именно, исходя из равномерной сети п.2 и положив $\theta_n = 1 (|n| \leq N)$ и $\theta_n = 0 (|n| > N)$, рассмотрим сначала оператор L на вектор-функциях $y \in C^2$ таких, что $y(-1) = y(1)$. Потребуем также, чтобы на некоторой вектор-функции $\psi(x) \in C^2$, $\psi(-1) = \psi(1)$, $\psi'(-1) \neq \psi'(1)$ представление

$$y(x) = \sum a_k(x)(\varphi_k, y) + b(x)y(-1) \quad (20)$$

было точным (здесь a_k – матрицы-функции и $(\varphi_k, y) = Ly(x_k)$). Нетрудно видеть, что данный выбор $\{\theta_n\}$ приводит к тому, что формула (20) будет точной и для системы $\{e^{inx}\}$, $|n| \leq N$.

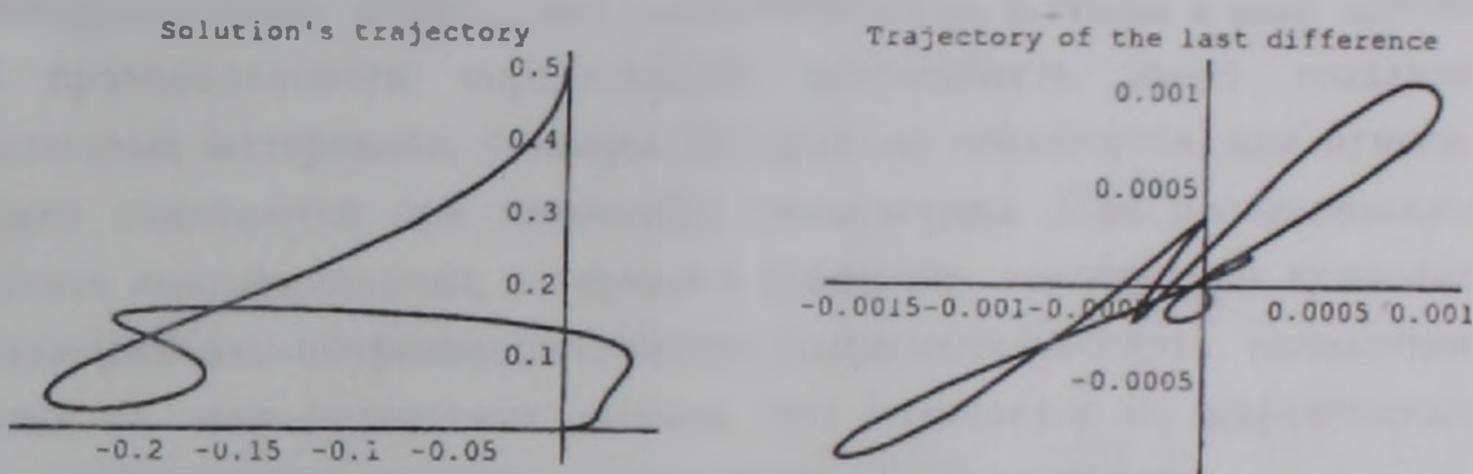
Не останавливаясь на деталях, отметим, что реализация этой схемы, — с точностью до обращения одной матрицы размерности $p \times p$, — приводит к явным формулам для коэффициентов $\{a_k(x)\}$ и $b(x)$.

Несложный анализ показывает, что в случае $f \in C^1[-1,1]$ и $u = v$ формула (20) дает приближенное решение с равномерной оценкой ошибки порядка $O(1/N^2)$. Переход к случаю $u \neq v$ очевиден.

Приведем результаты численной реализации для случая простой распадающейся системы, зависящей от двух параметров (α и β) ($Y = (y_1, y_2)^T = Y(x, \alpha, \beta)$)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3x - 1) \\ -\cos(3x + 1) \end{pmatrix} \quad (21)$$

при условиях $y_1(-1) = y_2(-1) = 0$, $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = \beta$ и $\psi(x) = \cos x$.



Траектории решения и разности $y_9 - y_7$.

На рисунке слева изображена траектория решения $y(x, \alpha, \beta)$ уравнения (21) в фазовом пространстве (y_1, y_2) при значениях параметров $\alpha = \sin 7x$, $\beta = x^3 / 2$ и $N = 4$, $-1 < x < 1$ (т.е., когда сумма в (20) содержит всего 9 членов). Справа приведена траектория разности этого решения Y_9 и решения Y_7 , соответствующего $N = 3$. Как показывает сравнение с точным решением, реальная ошибка $\varepsilon_9 = Y(x, \sin 7x, x^3 / 2) - Y_9$ примерно в 4 раза меньше.

Институт математики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

Պարամետրական մոտարկում և նրա որոշ կիրառություններ

Առաջարկվում է մի եղանակ, որի միջոցով ընդհանրացվում են որոշ Հայտնի մոտարկման բանաձևեր: Պարամետրների ընտրությունը թույլ է տալիս հարմարվել խնդիրներին: Նկարագրված է համապատասխան օրթոգոնալ համակարգը: Ստացված են զուգամիտության թեորեմներ:

Նկարագրված են կիրառություններ տվյալ ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքի գործակիցները որոշելու համար, ինչպես նաև երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի: Առաջարկված եղանակը թույլ է տալիս արագ հաշվել Ֆուրյեի գործակիցների մեծ քանակություն:

Պարամետրներից կախված հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումներով համակարգի մոտավոր լուծումը ներկայացվում է բացահայտ բանաձևով:

Թվային փորձարկումը անց է կացված MATHEMATICA 3.0 համակարգի օգնությամբ: Արդյունքները ցույց են տալիս, որ առաջարկվող եղանակը առանձնապես էֆեկտիվ է, երբ խնդիրը կախված է պարամետրներից, իսկ պահանջվող ճշտությունը համեմատաբար փոքր է:

ЛИТЕРАТУРА – ՊՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. Wolfram, The MATHEMATICA book, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996. ² G. Kaiser, A Friendly Guide to Wavelets, Birkhäuser, 1994. ³ А.Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., Мир, 1965. ⁴ А.В.Нерсисян, Theory of functions and applications. Collection of Works Dedicated to the Memory of Mkhitar M. Djrbashian. Yerevan, Louys, p.133-138, 1995.