

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 62-501.12

В. К. Брутян, А. Р. Бадалян

**Асимптотическая устойчивость управляемых систем,
описываемых параболическим уравнением
с частными производными**

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукурзяном 12/XI 1997)

1. *Введение.* Задача определения управления и устойчивости для систем с распределенными параметрами, описываемых параболическим дифференциальным уравнением, привлекает большое внимание. В работах (1-3) устанавливается критерий устойчивости для различных моделей управления с обратной связью и используется теория Ляпунова, а также принцип максимума для параболических уравнений. Кроме того, в работах (4-6) применяется теория Ляпунова в задачах теплопроводности и в проблемах однородных ядерных реакторов. В работах (7,8) в задачах ядерного реактора применялся метод сравнения функций.

В этой статье метод сравнения функций применяется к общему классу систем управления с распределенными параметрами. Достаточные условия асимптотической устойчивости выводятся для двух общих законов ограниченных управлений с обратной связью. Рассмотренные ограничивающие функции сравнения представляют собой верхнюю и нижнюю границы траекторий точного решения, и устойчивость подразумевается как в норме L_2 , так и в абсолютной норме (9,10) и в случае, когда оценивающий интеграл берется во времени. Иными словами, с помощью функций сравнения определяется и время реакции системы. Таким образом, цель настоящей статьи двоякая: во-первых, ввести метод сравнения функции как средство решения задачи управления с распределенными параметрами; во-вторых, установить достаточные условия для асимптотической устойчивости при интегральных замкнутых ограниченных управлениях с обратной связью. Основные результаты иллюстрируются конкретным примером.

2. *Основные обозначения и определения.* Пусть Q есть ограниченная открытая область m -мерного пространства X и Γ – ее граница. Через x обоз-

начается точка, принадлежащая области $Q_1 = Q \cup \Gamma$, и считается, что $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ являются ее координатами. Предполагается, что $\bar{Q}$ есть $(m+1)$ -мерная область пространства (X, t) , где $x \in Q_1$ и $0 \leq t \leq T$. Через M обозначаются внутренние точки этого гиперцилиндра и через Q_T – множество точек (x, t) , для которых $x \in Q$. Пусть Q_3 есть оставшаяся часть границы области $\bar{Q}$. Тогда $\bar{Q} = Q_2 \cup Q_3$, $Q_2 = M \cup Q_T$, где M представляет собой произведение пространств: $M = Q \cap (0 < t < T)$.

Предполагается, что рассматриваемый класс систем с распределенными параметрами описывается дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = L\Psi(x, t) + U(x, t, \Psi), \quad (1)$$

а граничные и начальные условия имеют вид

$$\Psi(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad \Psi(x, 0) = \Psi_0(x), \quad x \in Q_1, \quad (2)$$

где L есть оператор вида

$$L = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \quad (3)$$

а закон замкнутого управления определяется уравнением

$$U(x, t, \Psi) = \int_0^t \int_{x'} R[x, t, \Psi(x, t); x', \tau, \Psi(x', \tau)] d\tau dx'. \quad (4)$$

Интеграл во времени указывает на то, что закон управления может иметь память, интеграл по области дает возможность производить выборку всех точек в области, и общая форма ядра позволяет быть нелинейным относительно всех своих аргументов и даже неразложимых, если это необходимо. Единственным условием, накладываемым на закон управления, является то, что он ограничен и что

$$U(x, t, u) = O(u) \quad \text{при} \quad u \rightarrow 0. \quad (5)$$

Предполагается также, что уравнения системы определяют ее отклонения от состояния равновесия, под которым подразумевается нулевое состояние.

В качестве примера системы (1)-(5) можно отметить распределение нейтронов в однородном ядерном реакторе с линейной обратной связью по температуре ⁽⁴⁾. Для этого случая

$$U(x, t, \Psi) = \Psi(x, t) \int_0^t \int_{x'} G(x, t; x', \tau) \Psi(x', \tau) dx' d\tau,$$

где $G(x, t, x', \tau)$ есть функция Грина для линейного уравнения теплопроводности.

В качестве другого примера можно привести распределение температуры в частице пористого катализатора при необратимой химической реакции первого порядка (7). Если число Ловица в этом случае равно единице, то закон управления представляется в виде

$$U(x, t, \Psi) = \rho \Psi(x, t) \exp \left\{ \frac{\beta \gamma [1 - \Psi(x, t)]}{1 + \beta [1 - \Psi(x, t)]} \right\},$$

где β, γ и ρ — константы реакции.

Используя компактную форму записи уравнений системы, т.е.

$$\Psi_i - F(x, t, \Psi, \Psi_{x_i}, \Psi_{x_i x_j}) = 0,$$

можно сделать ряд следующих определений.

Определение 1. Величина $\bar{\Psi}(x)$ есть состояние равновесия системы (1)-(5), если она удовлетворяет уравнению:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t, \Psi, \Psi_{x_i}, \Psi_{x_i x_j}) = 0.$$

Определение 2. Пусть $u(x, t)$ есть решение рассматриваемой задачи. Тогда $\bar{\Psi}(x)$ будет устойчивым состоянием равновесия, когда для заданного $\varepsilon > 0$ (произвольного и конечного) существует $\eta \geq 0$ (произвольное и конечное) такое, что если $\max_{x \in Q_1} |u(x, 0) - \bar{\Psi}(x)| < \eta$, то справедливо неравенство

$$\max_{x \in Q_2} |u(x, t) - \bar{\Psi}| \leq \varepsilon.$$

Определение 3. Если $\bar{\Psi}(x)$ есть устойчивое состояние равновесия и если помимо условий определения 2 выполняется условие $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t) - \bar{\Psi}(x)| = 0, x \in Q_1$, то $\bar{\Psi}(x)$ называется асимптотически устойчивым состоянием равновесия системы.

Определение 4. Закон управления считается ограниченным, если существует положительная постоянная R (конечная) такая, что $|U(x, t, u)| \leq R, x \in Q_2$, для $u(x, t) \leq \eta$, т.е. когда u ограничено.

Определение 5. Закон управления считается положительно определенным, если $U_+(x, t, u) > 0, x \in Q_2$, для $u(x, t) \neq 0$ и $U_+(x, t, u) = 0$ для $u(x, t) = 0$. Этот тип закона управления отмечается нижним индексом "+".

3. Положительно определенное замкнутое управление. Ниже рассматриваются некоторые результаты, которые получаются для положительно определенных законов замкнутого управления и которые используются для получения критерия устойчивости в случае произвольно изменяющихся законов управления (11,12). Пусть система с распределенными параметрами и положительно определенным законом замкнутого управления описывается уравнением $\Psi_i - U_+(x, t, \Psi, p_i, p_{ij}) = 0$, где p_i и p_{ij} есть первая и вторая частные

производные $\partial\Psi/\partial x_i$ и $\partial^2\Psi/\partial x_i\partial x_j$ соответственно.

Если функция U_+ непрерывна относительно своих аргументов и непрерывны производные $\partial U_+/\partial p_{ij}$ для всех i, j , а квадратичная форма

$\sum_{i,j} \left(\partial U_+/\partial p_{ij} \right) \xi_i \xi_j$ (для действительных ξ_i, ξ_j) является положительно определенной, то справедливо предложение 1.

Предложение 1. Пусть $u(x, t)$ и $v(x, t)$ есть непрерывные функции в области $\bar{Q}$, а частные производные $u_t, u_x, u_{x,x}, v_t, v_x, v_{x,x}$ являются функциями в области Q_2 . Более того, пусть для области Q_2 справедливо неравенство

$$v_t - U_+(x, t, v, v_x, v_{x,x}) < u_t - U_+(x, t, u, u_x, u_{x,x}),$$

где функция U_+ обладает всеми выше перечисленными свойствами. Тогда, если $v(x, t) < u(x, t)$ в области Q , то $v(x, t) < u(x, t)$ в области $\bar{Q}$.

Доказательство предложения 1 для случая алгебраических нелинейностей в законе замкнутого управления, приведенное в работе (13), может непосредственно использоваться для доказательства случая нелинейного положительно определенного замкнутого управления, зависящего от предыстории функции состояния (интеграл по времени типа интеграла Вольтерра в уравнении (4)), а также для интеграла Фредгольма по области в управлении (4). Следует отметить, что это доказательство не применимо в случае произвольно изменяющегося закона управления, описываемого уравнением (4).

Теперь воспользуемся предложением 1 для доказательства теоремы устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1)-(5) в случае ограниченного положительно определенного замкнутого управления.

Теорема 1. Пусть система с распределенными параметрами, описываемая уравнениями (1)-(5), имеет ограниченный положительно определенный закон замкнутого управления и существует число η такое, что для начального условия справедливо неравенство:

$$\max_{x \in Q_1} |\Psi_0(x)| < \eta. \quad (6)$$

В этом случае существует положительная постоянная R_+ (в смысле определения 3) такая, что достаточное условие асимптотической устойчивости (в смысле определения 4) нулевого состояния равновесия определяется выражением

$$\max_{x \in Q} c(x) < \mu_0^2 - R_+, \quad (7)$$

где μ_0^2 есть наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области Q .

Доказательство этой теоремы приводится в приложении.

З а м е ч а н и е 1. Величина постоянной R_+ , которая ограничивает закон управления, легко определяется из уравнения (П.1.6), поскольку $u(x,t) > \Psi(x,t) > -u(x,t)$. Достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия может использоваться для решения ряда задач. Для заданного $c(x) < \mu_0^2$ можно найти положительно определенное управление, ограниченное постоянной R_+ и обеспечивающее асимптотическую устойчивость системы. С другой стороны, оно может применяться для определения границы $c(x)$ при произвольном ограниченном положительно определенном управлении, зависящей от функции состояния (уравнение (7)). Кроме того, поскольку постоянная R_+ зависит от начального условия, то последнее можно рассматривать как свободный параметр и с помощью достаточного условия определить устойчивость системы при различных начальных условиях. В данном случае отсутствует ограничение, что $c(x)$ обязательно является отрицательным, т.е. коэффициент $c(x)$, выбранный в соответствии с критерием устойчивости, может быть и положительным. Кроме того, в данном случае отсутствует также ограничение и на скорость изменения функции $U_+(x,t,\Psi)$ за исключением того, что она сама ограничена. Когда система является неуправляемой, т.е. когда $U_+(x,t,\Psi) \equiv 0$, асимптотическая устойчивость гарантируется, если

$$\max_{x \in Q} c(x) < \mu_0^2. \quad (8)$$

Поскольку R_+ является числом, зависящим от величины начального условия, то уравнение (8) определяет условие абсолютной устойчивости в следующем смысле. Для произвольных начальных условий система (1)-(5) при отсутствии управления является асимптотически устойчивой относительно своего нулевого состояния равновесия, если выполняется условие (8). При введении положительного управления начальные условия ограничиваются величиной $c(x)$, определяемой уравнением (7). Выбирая в качестве нижней ограничивающей функции функцию $-u(x,t)$, можно допустить также и отрицательные начальные условия. Это необходимо, когда уравнения системы описывают ее отклонения от нетривиального состояния равновесия.

Наконец, ограничивающие функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ представляют собой верхнюю и нижнюю границы траекторий точного решения. Следовательно, это означает устойчивость как в смысле нормы L_2 , так и в абсолютном смысле. С помощью функций u и v также можно определить и время реакции системы.

4. Ограниченные законы управления. Рассматриваются законы управления, которые не являются положительно определенными.

Предложение 2. Пусть $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — непрерывные функции в области $\bar{Q}$ с непрерывными частными производными $u_t, u_x, u_{x,x}, v_t, v_x, v_{x,x}$ в области Q_2 . Более того, пусть в области Q_2

$$v_t - U(x, t, v, v_x, v_{x,x}) < u_t - U_+(x, t, u, u_x, u_{x,x}), \quad (9)$$

где функция U имеет ограниченный закон управления $U(x, t, v)$ и функция U_+ — ограниченный положительно определенный закон управления $U_+(x, t, u)$. Предполагается также, что в области Q_2

$$U(x, t, s) \leq U_+(x, t, s) \quad (10)$$

для произвольных $s(x, t)$. Тогда, если $v(x, t) < u(x, t)$ на границе Q_3 , то $v(x, t) < u(x, t)$ в области $\bar{Q}$.

Доказательство предложения 2 аналогично доказательству предложения 1, если в уравнениях для $v(x, t)$ функция U заменена на функцию U_+ . Более того, эти предложения для положительно определенного замкнутого управления становятся тождественными, если в уравнении (10) справедлив знак равенства. Доказательство предложения 2 также приводится в приложении.

З а м е ч а н и е 2. Предложение 2 допускает равенство на границе области Q_3 в начальном условии и в уравнении (9), если на функции U и U_+ наложено дополнительное ограничение. Однако это ограничение не может удовлетворяться теми законами управления общего вида, которые рассматриваются в настоящей статье. Кроме того, предложение 2 доказывается для алгебраических нелинейностей в законе управления и его можно применить к замкнутому управлению интегрального типа только в том случае, если ограниченный закон управления U_+ является положительным.

З а м е ч а н и е 3. Теперь можно показать необходимость требования положительности на верхней ограничивающей функции для интегрального замкнутого управления. Пусть U_+ и U определяются отрицательными законами управления вида

$$U_+(x, t, u) = - \int_{x'} R_1(x; x') u(x', \tau) dx' \quad \text{и} \quad U(x, t, v) = - \int_{x'} R_2(x; x') v(x', \tau) dx',$$

где R_1 и R_2 — положительные функции и $R_1(x; x') \leq R_2(x; x')$. Поскольку $-R_1(x; x') \geq -R_2(x; x')$, то условие (11) выполняется и в точке $\tilde{P}$

$$U_+(\tilde{P}, u) - U(\tilde{P}, v) = \int_{x'} \{ R_2(x; x') v(x', \tilde{t}) - R_1(x; x') u(x', \tilde{t}) \} dx'. \quad (11)$$

Если $R_2 = R_1$, то разность $U_+ - U$ является отрицательной, так как для всех $x \in Q$ и $t = \tilde{t}$, $u(x, \tilde{t}) \geq v(x, \tilde{t})$. Этот случай рассматривается в предложении 1 и приводит к нарушению условий предложения 2. Если $R_2 \geq R_1$ (как

в предложении 1), то уравнение (11) становится неопределенным и теорема опровергается. Для алгебраических нелинейностей в предложении 2 $U(\tilde{P}, u) - U(\tilde{P}, v) = 0$, поскольку закон управления выбирает только одну точку $\tilde{P}$, где $u(\tilde{P}) \equiv v(\tilde{P})$. Для алгебраических нелинейностей в предложении 2 верхний ограничивающий закон также является положительно определенным. Этот факт справедлив и в случае, если интеграл берется по времени. Таким образом, для интегрального замкнутого управления верхний ограничивающий закон всегда является положительно определенным. Теперь можно сформулировать следствие, которое вытекает из предложения 2 и потребуется при анализе произвольно изменяющихся законов управления.

С л е д с т в и е . Предполагается, что выполняются условия непрерывности всех функций, о которых отмечалось выше. Определим отрицательно определенный закон замкнутого управления в виде

$$U_-(x, t, s) \equiv -U_+(x, t, s). \quad (12)$$

Пусть в области Q_2

$$v_t - U(x, t, v, v_{x_i}, v_{x_i x_j}) > \omega_t - U_-(x, t, \omega, \omega_{x_i}, \omega_{x_i x_j}), \quad (13)$$

где U содержит функцию $U(x, t, v)$ и U_- — функцию $U_-(x, t, \omega)$.

Можно рассмотреть также частный случай, когда $\omega(x, t) \equiv -u(x, t)$, где функция $u(x, t)$ обладает теми же свойствами, как и функция $v(x, t)$ в вышеприведенном предложении 2. Кроме того, предполагается, что $U(x, t, v) \geq U_-(x, t, u)$. Тогда, если $v(x, t) > -u(x, t)$ на границе Q_3 , то $v(x, t) > -u(x, t)$ в области $\bar{Q}$.

З а м е ч а н и е 4 . Это следствие необходимо для получения нижней границы. Объединяя предложение 2 и следствие, получим

$$u_t - Lu - U_+(x, t, u) > v_t - Lv - U(x, t, v) > -u_t + Lu + U_+(x, t, u) \quad (14)$$

в области Q_2 и $u(x, t) > v(x, t) > -u(x, t)$ в области $\bar{Q}$, когда $U_+(x, t, s) \geq U(x, t, s) \geq -U_+(x, t, s)$. Это означает, что функция $u(x, t)$ всегда является положительной. Доказательство следствия также приводится в приложении.

З а м е ч а н и е 5 . Полученный результат может обобщаться, если положить, что $\omega(x, t)$ есть произвольная отрицательная функция, удовлетворяющая условиям предложения 2 и $U(x, t, s)$ (произвольный отрицательно определенный закон управления) не противоречит предложению 2, поскольку выполняется условие (14).

Т е о р е м а 2 . Пусть рассматривается система с распределенными параметрами, описываемая уравнениями (1)-(5) и имеющая ограниченное замкнутое управление. В этом случае если существует число η такое, что началь-

ное условие $\Psi_0(x)$ удовлетворяет неравенству $\max_{x \in Q_1} |\Psi_0(x)| < \eta$, то существует положительная постоянная R такая, что достаточное условие асимптотической устойчивости (в смысле определения (10)) нулевого состояния равновесия определяется выражением $\max_{x \in Q} c(x) \leq \mu_0^2 - R$, где μ_0^2 есть наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области Q .

Доказательство теоремы 2 также приводится в приложении.

З а м е ч а н и е 6. Оценка R в законе управления получается из уравнения (П.3.5.). Практическое применение критериев устойчивости такое же, как в теореме 1. В этом случае, однако, должен получиться положительно определенный управляющий закон, границы которого произвольны, прежде чем он вступит в силу. Оценка R одна и та же в обоих случаях.

П р и м е р . В качестве примера рассматривается однородный ядерный реактор (плоская задача) с коэффициентом усиления, линейно изменяющимся с температурой. Если потеря тепла в каждой точке реактора пропорциональна температуре и коэффициент обратной связи ρ_0 положительный, то плоскость нейтронов удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + c_0 \Psi(x, t) + U_+(x, t, \Psi)$$

с начальным и граничным условиями

$$\Psi(x, 0) = \eta \cos(\pi x), \quad x \in [-1, 1], \quad \Psi(x, t) = 0, \quad x = \pm 1.$$

В этом случае закон управления имеет вид

$$U_+(x, t, \Psi) \equiv \rho_0 \Psi(x, t) \int_0^1 \Psi(x, \tau) \exp[-\beta(t - \tau)] d\tau,$$

где β есть коэффициент местной теплопередачи.

Поскольку функция $U_+(x, t, \Psi)$ есть положительно определенный ограниченный закон управления, то в силу теоремы 1 достаточным условием асимптотической устойчивости нулевого состояния является неравенство

$$c_0 < \pi^2 - R_+, \quad (15)$$

где R_+ коэффициент определяется из выражения $R_+ = \max_{x \in [-1, 1], t \geq 0} U_+(x, t, u)$, а

π^2 есть наименьшее собственное значение оператора d^2/dx^2 . Для рассматриваемого случая

$$u(x, t) = A \cos \left\{ \left[\sqrt{(\pi^2 - \varepsilon)} \right] x \right\} \exp(-\varepsilon t),$$

где $A > \eta$ и ε — малая положительная постоянная.

Численное значение коэффициента R_+ можно получить путем подстановки функции $u(x, t)$ в уравнение $U_+(x, t, u)$ и соответствующего интегрирования. После выполнения указанных операций имеем

$$R_+ = \frac{\rho_0 A^2}{\beta - \varepsilon} \max_{t \geq 0} \{ \exp(-\varepsilon t) [\exp(-\varepsilon t) - \exp(-\beta t)] \}.$$

Для малых ε можно получить $R_+ \approx \frac{\rho_0 A^2}{\beta}$. Если коэффициент обратной связи меняется в пространстве, то управление $U(x, t, \Psi)$ описывается выражением $R(x, t, \Psi) = \frac{\rho(x)}{\rho_0} U_+(x, t, \Psi)$, которое дает ограниченное замкнутое управление, если ограничена функция $\rho(x)$. На основании теоремы 2 выражение (15) является достаточным условием асимптотической устойчивости, если $\left| \frac{\rho(x)}{\rho} \right| \leq 1$.

5. Приложение. Доказательство теоремы 1. Пусть рассматривается сравниваемая функция $u(x, t) = A\Phi_0(x)\exp(-\alpha t)$, где $\Phi_0(x)$ есть всюду положительная непрерывная собственная функция (единичной амплитуды) оператора Лапласа L_0 , соответствующая наименьшему собственному значению $(\mu_0^2 - \alpha)$ в несколько большей (чем ранее принятая для рассмотрения область Q) области Q_α . Произвольные постоянные A и α здесь подлежат определению, а функция $\Phi_0(x)$ равна нулю на границе этой увеличенной области. Можно отметить свойства, которыми обладает в области Q сравниваемая функция:

$$u(x, 0) = A\Phi_0(x), \quad x \in Q_1, \quad (\text{П.1.1.})$$

$$u(x, t) > 0, \quad x \in Q_1, \quad t \geq 0, \quad (\text{П.1.2.})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad x \in Q_1, \quad (\text{П.1.3.})$$

а также подчеркнуть, что при построении этой функции используется свойство собственных значений оператора Лапласа (убывание по величине и по мере роста размеров области). При этом предполагается, что область Q полностью находится внутри области Q_α и отсутствуют точки x , одновременно принадлежащие границам Γ и Γ_α . Поскольку функция $\Phi_0(x)$ является непрерывной и положительной в области Q , а начальное условие $\Psi_0(x)$ удовлетворяет неравенству (6), то постоянная A всегда выбирается такой, что

$$A\Phi_0(x) > \Psi_0(x), \quad x \in Q_1, \quad (\text{П.1.4.})$$

Следовательно, постоянная A зависит от числа η . В области Q_2

$$u_t - U_+(x, t, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) = u(x, t) \{ \mu_0^2 - c(x) - 2\alpha \} - U_+(x, t, u),$$

так как $L_0 \Phi_0(x) + \mu_0^2 \Phi_0 = 0$ и $L_0 - c(x)$. Но поскольку

$$\max_{x \in Q_1, t \geq 0} u(x, t) = A \quad (\text{П.1.5})$$

и $U_+(x, t, u)$ есть положительно определенный ограниченный закон управления, то из этого следует

$$\max_{x \in Q_1, t \geq 0} U_+(x, t, u) \leq R_+, \quad (\text{П.1.6})$$

где постоянная R_+ зависит от числа η в силу выражений (П.1.4) и (П.1.5).

Более того, поскольку $U_+(x, t, u) = O(u)$ при $u \rightarrow 0$, то

$$u_t - U_+(x, t, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) > 0, (x, t) \in Q_2,$$

когда

$$\max_{x \in Q_1} c(x) < \mu_0^2 - R_+ \quad (\text{П.1.7})$$

и постоянная α такая, что $0 < \alpha < \left\{ \mu_0^2 - R_+ - \max_{x \in Q_1} c(x) \right\} / 2$.

Последнее условие всегда выполняется в силу строгого неравенства (П.1.7).

Аналогичным образом рассматривается другая сравнивающая функция $v(x, t) \equiv -u(x, t)$, обладающая свойствами: 1) $v(x, 0) = -A\Phi_0(x)$, 2) $v(x, t) < 0$, 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$, при $x \in Q_1, t \geq 0$.

Поскольку неравенство (П.1.7) выполняется и функция $U_+(x, t, v)$ является положительно определенной, то

$$v_t - U_+(x, t, v, v_{x_i}, v_{x_i x_j}) < 0, (x, t) \in Q_2. \quad (\text{П.1.8})$$

Используя теперь приведенные выше свойства сравнивающих функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ и принимая во внимание уравнение (2), можно получить $u(x, t) > \Psi(x, t) > v(x, t), x \in \Gamma, t \geq 0$. Но в силу этих же свойств сравнивающих функций и уравнения (П.1.4) имеем: $u(x, 0) > \Psi(x, 0) > v(x, 0), x \in Q_1$, следовательно, $u(x, t) > \Psi(x, t) > v(x, t)$ на границе Q_3 . Поскольку уравнения (П.1.7) и (П.1.8) справедливы в области Q_2 и $\Psi(x, t)$ есть решение уравнения (1), то на основании предложения 1 получается: $u(x, t) > \Psi(x, t) > v(x, t)$ в области $\bar{Q}$. Следовательно, функция Ψ в области и на ее границе всегда ограничена сверху функцией u и снизу функцией v .

Но в силу свойств сравнивающих функций $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$, откуда получается

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Psi(x, t)| \equiv 0. \quad (\text{П.1.9})$$

Далее, используя уравнения (П.1.4), (П.1.5), (П.1.9) и определения 2 и 3, можно заключить, что уравнение (7) представляет собой достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия рассматриваемой системы.

Доказательство предложения 2. Для доказательства предложения 2 воспользуемся методами от противного. Пусть $g = u - v$. Предполагается, что множество точек области $\bar{Q}$, где $g(x, t) \leq 0$, является ненулевым (т.е. $v > u$). Тогда на основании непрерывности функции g , предложения о поведении функции g на границе и начального условия можно сделать вывод, что существует точка $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{t})$ такая, что $g(\tilde{P}) = 0$ и $g(x, t) > 0$ для всех $t < \tilde{t}$ и всех $x \in Q$. По предположениям точка $\tilde{P}$ должна находиться внутри области $\bar{Q}$. Кроме того, из определения точки $\tilde{P}$ следует, что $g(x, \tilde{t}) \geq 0$ для $x \in Q$. Таким образом, функция $g(x, \tilde{t})$, если ее рассматривать как функцию m переменных $(x_1, \dots, x_m)$, допускает внутренний минимум в точке $\tilde{P}$. Следовательно, в точке $\tilde{P}$:

$$(1) \text{ первичные частные производные } g_{x_i} = 0;$$

$$(2) \text{ квадратичная форма } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{x_i x_j} \xi_{x_i} \xi_{x_j} \geq 0;$$

$$(3) g_t(\tilde{P}) \leq 0.$$

Переходя далее к функциям u и v , для точки $\tilde{P}$ имеем:

$$(a) u(\tilde{P}) = v(\tilde{P}), (b) u_{x_i}(\tilde{P}) = v_{x_i}(\tilde{P}), (в) Lu - Lv \geq 0, (г) u_t - v_t \leq 0.$$

Поскольку $u(x, t) > v(x, t)$ для $\tilde{t} > t \geq 0$ и $u(x, \tilde{t}) \geq v(x, \tilde{t})$ для всех $x \in Q$ и выполняется условие (10), то

$$\begin{aligned} U_+(\tilde{P}, u) - U(\tilde{P}, v) &= \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int_{x'} R_+[\tilde{P}, u(\tilde{P}); x', \tau, u(x', \tau)] dx' - \\ &- \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int_{x'} R[\tilde{P}, v(\tilde{P}); x', \tau, v(x', \tau)] dx' \geq 0. \end{aligned}$$

Но на основании свойств (a)-(c) для точки $\tilde{P}$ можно написать

$$Lu(\tilde{P}) + U_+(\tilde{P}, u) - Lv(\tilde{P}) + U(\tilde{P}, v) \geq Lu(\tilde{P}) - Lv(\tilde{P}) \geq 0,$$

так что

$$U_+(\tilde{P}, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) - U(\tilde{P}, v, v_{x_i}, v_{x_i x_j}) \geq 0, \quad (\text{П.2.1})$$

Используя теперь свойство (г), вместо неравенства (П.2.1) можно получить выражение:

$$u_t - v_t \leq 0 \leq U_+(\tilde{P}, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) - U(\tilde{P}, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) \text{ или}$$

$$v_t - U(\tilde{P}, v, v_{x_i}, v_{x_i x_j}) \geq u_t - U_+(\tilde{P}, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}),$$

которое противоречит условию (9) в точке $\tilde{P}$. Поскольку условие (9) должно выполняться для всех точек области Q_2 , множество точек (x, t) , где $g(x, t) \leq 0$, является нулевым, т.е. функция $u(x, t)$ нигде не может пересечь $v(x, t)$.

Доказательство следствия. Для доказательства следствия также воспользуемся методом от противного. Пусть $g(x, t) = v(x, t) - \omega(x, t)$. Тогда, используя предположения о непрерывности функций (так же, как и при доказательстве теоремы) в предполагаемой точке пересечения $\tilde{P}$ для функции $v(x, t)$ и $-u(x, t)$, получается:

$$(a) \ v_t + u_t \leq 0, \quad (б) \ Lu + Lv \geq 0, \quad (в) \ U_+(x, t, u) \geq U(x, t, v),$$

так что

$$Lv + Lu + U_+(x, t, u) + U(x, t, u) \geq 0.$$

Следовательно, $v_t - Lv - U(x, t, v) \leq -u_t + Lu + U_+(x, t, u)$ в точке $\tilde{P}$. Поскольку это противоречит условию (14) и, следовательно, уравнению (13), то точка $\tilde{P}$ никогда не получится и $v(x, t) > -u(x, t)$ в области Q_2 .

Доказательство теоремы 2. Поскольку закон замкнутого управления ограничен, то существует положительно определенный закон управления такой, что $-U_+(x, t, s) \leq U(x, t, s) \leq U_+(x, t, s)$. В теореме 1 показывается, что на основании выбора сравнивающей функции $u(x, t) = A\Phi_0(x)\exp(-\alpha t)$ (в данном случае постоянные A , α и функция $\Phi_0(x)$ выбираются так же, как и в теореме 1) можно написать:

$$(a) \ u(x, t) > 0, \ x \in \Gamma, \ t \geq 0,$$

$$(б) \ \max_{x \in Q_1} \omega(x, 0) = A, \ x \in Q_1,$$

$$(в) \ \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \ x \in Q_1,$$

$$(г) \ u_t - Lu - U_+(x, t, u) > 0, \ x \in Q_2,$$

где $U_+(x, t, u)$ есть ограниченный положительно определенный закон управления, если

$$\max_{x \in Q} c(x) < \mu_0^2 - R_+. \quad (П.3.1)$$

Аналогично, рассматривая сравнивающую функцию $\omega(x, t) = -u(x, t)$, можно получить:

$$(a) \ \omega(x, t) < 0, \ x \in \Gamma, \ t \geq 0,$$

$$(б) \ \min_{x \in Q_2} \omega(x, 0) = -A,$$

$$(в) \ \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(x, t) = 0, \ x \in Q_1,$$

$$(г) \ -u_t + Lu + U_+(x, t, u) < 0, \ x \in Q_2,$$

если снова выполняется условие (П.3.1). Поскольку $\Phi_0(x)$ есть положительная и непрерывная функция в области Q и начальное условие $\Psi_0(x)$ удовлетворяет

неравенству (15), то коэффициент A всегда выбирается таким (достаточно большим), чтобы выполнялись условия $-A\Phi_0(x) < \Psi_0(x) < A\Phi_0(x)$. Следовательно, коэффициент A зависит от η . Таким образом, подводя итоги, можно иметь

$$(1) \quad u(x,0) > \Psi(x,0) > \omega(x,0), x \in Q_1,$$

$$(2) \quad u(x,t) > \Psi(x,t) > \omega(x,t), x \in \Gamma, t \geq 0,$$

$$(3) \quad u_t - Lu - U_+(x,t,u) > \psi_t - L\psi - U(x,t,\psi) > \omega_t - L\omega - U(x,t,\omega), x \in Q_2,$$

$$(4) \quad U_+(x,t,s) \geq U(x,t,s) \geq U_-(x,t,s)$$

где $U_-(x,t,s) \equiv -U_+(x,t,s)$. Используя эти условия, предложение 2 и следствие, можно получить

$$u(x,t) \geq \Psi(x,t) \geq \omega(x,t) \quad (\text{П.3.2})$$

в области $\bar{Q}$. Следовательно, функция $\Psi(x,t)$ в области и на границе всегда ограничена сверху функцией $u(x,t)$ и снизу функцией $\omega(x,t)$. Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(x,t) = 0,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Psi(x,t)| \equiv 0. \quad (\text{П.3.3})$$

Так как

$$\max_{x \in Q_1, t \geq 0} |u(x,t)| = A,$$

то можно получить

$$\max_{x \in Q_1, t \geq 0} |\Psi(x,t)| < A. \quad (\text{П.3.4})$$

Используя уравнения (15), (П.3.3), (П.3.4) и определения (2), имеем $\bar{\Psi}(x) \equiv 0$, которое является асимптотически устойчивым состоянием равновесия, если $\max_{x \in Q_1} C(x) < \mu_0^2 - R_+$. Коэффициент R_+ определяется выражением

$$\max_{x \in Q_1, t \geq 0} R_+(x,t,u) \equiv R_+, \quad (\text{П.3.5})$$

так что $R \equiv R_+$ есть граница для управления $U(x,t,\Psi)$. При этом коэффициент R_+ и, следовательно, R зависят от числа η в силу условия (П.3.2). Это завершает доказательство теоремы 2.

Высшее военное многопрофильное командное училище МО РА

Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, Ա. Ռ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

Մասնակի ածանցյալներով պարաբոլիկ եավասարումով նկարագրվող կառավարելի համակարգի ասիմպտոտիկ կայունությունը

Դիտարկվում է կառավարման և կայունության որոշման խնդիրն ընդհանուր դասի հետադարձ կապով ընդգծված ոչ գծային համակարգի համար, որը նկարագրվում է մասնակի ածանցյալներով պարաբոլիկ դիֆերենցիալ հավասարումով: Որոշվում են կայունության հայտանիշներ, օգտագործելով Լյապունովի կայունության տեսությունը և պարաբոլիկ դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող կառավարելի համակարգերում մաթ-

սիմուլի սկզբունքը: Աշխատանքում նախ դիտարկվում է ֆունկցիաների համեմատական մեթոդը որպես տարածական պարամետրերով և հետադարձ կապով կառավարելի համակարգերի խնդրի լուծման միջոց, իսկ այնուհետև, ուսումնասիրվում է հետադարձ կապով կառավարման ժամանակ ասիմպտոտիկ կայունության բավարար պայմանները: Հիմնական արդյունքները մեկնաբանվում են կոնկրետ օրինակի օգնությամբ: Մասնավորապես, ջերմահաղորդման խնդրում կիրառվում են կայունության բավարար պայմանները միջուկային միասեռ ռեակտորների համար:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *Е.А.Барабашин*, Функции Ляпунова, М., Наука, 1970. ² *В.Г.Болтянский*, Математические методы оптимального управления, М., Наука, 1980. ³ *Ж.Л.Лионс*, Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Пер. с франц. М., Мир, 1972. ⁴ *А.Г.Бутковский*, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М., Наука, 1965. ⁵ *Р.К.С. Wong*, IEEE Trans. autom. control, v.11, №46, (1966 b). ⁶ *Р.К.С. Wong*, Int. J. Control, v.3, №139 (1966 c). ⁷ *А.Г.Бутковский, С.А.Малый, Ю.Н.Андреев*, Оптимальное управление нагревом металла, М., Metallurgy. 1972. ⁸ *В.К.Брутян*, Основные аспекты теории марковских управляемых систем и ее приложение. Ереван, Айастан, 1984. ⁹ *А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа, М., Наука, 1988. ¹⁰ *А.Фридман*, Уравнения с частными производными параболического типа, М., Мир, 1968. ¹¹ *В.К.Брутян*, Автоматика и телемеханика, №7, с.51-61, 1980. ¹² *В.К.Брутян*, Уч. зап. Ереванск. гос. ун-та, серия Е.Н., Математика, т.141, №2, с.16-26 (1979). ¹³ *Э.Б.Ли, Л.Маркус*, Основы теории оптимального управления, М., Наука, 1972.