ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №1

МАТЕМАТИКА

УДК 512.58 + 512.55

Г. Г. Эмин

Наследственные и сильные строгие радикалы категории *Mod*

(Представлено академиком НАН Армении Р.Р.Варшамовым 15/XI 1997)

Рассматривается категория *Mod* – модулей над всеми кольцами. Объекты этой категории – всевозможные пары (A, U), где U – ассоциативное кольцо, не обязательно с единицей, A – правый U-модуль. Множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар (φ_A, φ_U), где φ_A – гомоморфизм абелевой группы A в абелеву группу B, а φ_U – гомоморфизм кольца U в кольцо V, причем $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$ для любых $a \in A$, $u \in U$. Такая пара называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V). Умножение морфизмов происходит покомпонентно.

Пусть $\mathbf{K}$ – категория, удовлетворяющая всем условиям, необходимым для построения в ней общей теории радикалов в смысле Куроша (см. ([1]), §1 главы 5; ([2]), §1, п.8).

r-радикал, определенный в $\mathbf{K}$, назовем строгим, если r-радикал $(r(A), \mu_A]$ любого объекта $A \in \mathrm{K}$ содержит все r-подобъекты объекта A. Ясно, что в любой абелевой категории каждый r-радикал является строгим r-радикалом (см. ([2]), §2, п.1).

r-радикал категории $\mathbf{K}$ назовем сильно наследственным, соответственно идеально наследственным, если для любого подобъекта, соответственно любого идеала $(U, \sigma]$ произвольного объекта A категории $\mathbf{K}$ имеет место равенство $(r(U), \mu_U \sigma] = (r(A), \mu_A] \bigcap (U, \sigma]$, где $(r(U), \mu_U]$ – r-радикал объекта U и $(r(A), \mu_A]$ – r-радикал объекта A. Нетрудно проверить, что любой сильно наследственный радикал является строгим.

r-радикал категории $\mathbf{K}$ назовем сильным, если класс всех r-полупростых объектов замкнут относительно коидеалов.

Категория *Mod* удовлетворяет всем условиям, необходимым для построения в ней общей теории радикалов в смысле Куроша (см. ([3]), §3).

Пусть R – некоторый строгий радикал категории ассоциативных колец

As, а $R_U(U \in A_s)$ – некоторые радикалы категории *Mod-U*, где *Mod-U* – категория правых U-модулей над фиксированным кольцом U.

Систему $\{R; R_U | U \in As\}$ назовем согласованной системой строгих радикалов, если она удовлетворяет следующим условиям:

(P1) $A \cdot R(U) \subseteq R_U(A)$ для любого U-модуля A;

(P2) $R_U(B_\varphi) \subseteq R_V(B)$ для любого V-модуля B и U-модуля B_φ, полученного из модуля B отступлением вдоль гомоморфизма колец $\varphi: U \to V$ (см. [3], с.212);

(P3) $R_U(A) = R_{R(U)}(A)$ для любого U-модуля A.

Теорема 4 работы [4] и теорема 3.1 работы [3] дают описание строгих радикалов категории *Mod* с помощью согласованных систем строгих радикалов, причем, если строгому радикалу r категории *Mod* соответствует система $\{R; R_U | U \in As\}$, то, по определению, $r(A,U) = (R_U(A), R(U))$ для любого $(A,U) \in Mod$.

З а м е ч а н и е 1. Радикал R_O системы $\{R; R_U | U \in As\}$ является радикалом категории абелевых групп Ab. Поскольку $R_O(A)\eta \subseteq R_O(A)$ для любой абелевой группы A и любого эндоморфизма η этой группы, то подгруппа $R_O(A)$ является U-подмодулем для произвольного U-модуля A. Учитывая это, нетрудно проверить, что R_O является радикалом во всех категориях $Mod\text{-}U(U \in As)$.

Если система строгих радикалов $\{R; R_U | U \in As\}$ такова, что в ней $R_U = R_O$ для любого $U \in As$, то такую систему мы будем обозначать $\{R; R_O\}$ или $\{R; R_{Ab}\}$, где $R_{Ab} = R_O$. Поскольку в такой системе условия (P2) и (P3) выполняются автоматически, то согласованность такой системы означает выполнение только лишь условия $A \cdot R(U) \subseteq R_O(A)$ для любого U-модуля A, т.е. выполнения только лишь условия (P1).

Т е о р е м а 1. *Система строгих радикалов* $\{R; R_U | U \in A_s\}$ *тогда и только тогда определяет идеально наследственный строгий радикал в Mod, когда она удовлетворяет условию (P1) и имеет вид* $\{R; R_O\}$, *где* R *– идеально наследственный строгий радикал в* As, *а* R_O *– кручение в* Ab.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть r – идеально наследственный строгий радикал в *Mod* и $\{R; R_U | U \in As\}$ – определенная этим строгим радикалом согласованная система строгих радикалов. Покажем, что эта согласованная, т.е. удовлетворяющая условию (P1), система строгих радикалов имеет вид $\{R; R_O\}$, где R – идеально наследственный радикал, а R_O – кручение.

Пусть U – некоторое ассоциативное кольцо и A – произвольный U-модуль. Рассмотрим модуль (A,O). Нетрудно проверить, что (A,O) является идеалом модуля (A,U) (см. [3], с.227). Поэтому, поскольку r – идеально наследственный радикал, то $(R_O(A),O)=r(A,O)=(A,O)\bigcap r(A,U)=$ $=(A\bigcap R_U(A),O)=(R_U(A),O)$, т.е. $R_U(A)=R_O(A)$ для любого U-модуля A, где $U\in As$. Значит, $R_U=R_O$ для любого $U\in As$.

Пусть теперь U – произвольное ассоциативное кольцо и V – некоторый идеал кольца U. Очевидно, что (O,V) – идеал модуля (O,U). Поэтому поскольку r – идеально наследственный радикал, то $(O,R(V))=r(O,V)=$ $=(O,V)\bigcap r(O,U)=(O,V\bigcap R(U))$. Получили, что $R(V)=V\bigcap R(U)$, т.е. что R – идеально наследственный радикал в As.

Аналогичным образом, рассматривая модули вида (A, O), можно доказать, что R_O – кручение в категории Ab.

Обратно, пусть система строгих радикалов вида $\{R;R_O\}$ удовлетворяет условиям теоремы. Поскольку эта система удовлетворяет условию (P1), то согласно замечанию 1 она является согласованной. Поэтому в силу теоремы 3.1 работы [3] эта система строгих радикалов определяет вполне определенный строгий радикал r категории Mod. Покажем, что строгий радикал r является также и идеально наследственным.

Пусть (A,U) – некоторый модуль и (B,V) – произвольный его идеал. Поскольку V – идеал кольца U, B – подгруппа абелевой группы A, R – идеально наследственный радикал в As, а R_O – кручение в Ab, то $R(V)=V\bigcap R(U)$ и $R_O(B)=B\bigcap R_O(A)$. Поэтому $r(B,V)=(R_O(B),R(V))=$ $=(B\bigcap R_O(A),V\bigcap R(U))=(B,V)\bigcap r(A,U)$. Теорема доказана.

Лемма 1. *Система строгих радикалов $\{R;R_U \mid U\in As\}$ тогда и только тогда определяет сильно наследственный радикал в категории Mod, когда она удовлетворяет условию (P1) и имеет вид $\{R;R_{Ab}\}$, где R – сильно наследственный радикал категории As, а R_{Ab} – кручение категории Ab.*

Любой идеал произвольного модуля категории Mod является подмодулем этого модуля, поэтому доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 2. Известно (см.[5], 2,17 и [6], предложение 4.1), что нетривиальные кручения в категории абелевых групп и нетривиальные сильно наследственные радикалы в категории ассоциативных колец описываются с помощью наборов простых чисел.

Пусть Π и Λ – некоторые наборы простых чисел. Π-числами, соответственно, Λ-числами, назовем произведения степеней чисел из Π, соответственно, из Λ. Сильно наследственный радикал категории As, соответственно, кручение категории Ab, определенное набором простых чисел Π, соответственно, набором простых чисел Λ, обозначим через R^{Π}, соответственно, через R_{Ab}^{Λ}. Радикальный класс сильно наследственного радикала R^{Π}, соответственно, кручения R^{Λ}_{Ab}, состоит из всех таких колец U, соответственно, из всех таких абелевых групп A, что для любого $u \in U$, соответственно, для любого $a \in A$, $nu = o$, соответственно, $ma = o$, для некоторого П-числа n, соответственно, для некоторого Λ-числа m.

Лемма 2. *Для системы нетривиальных сильно наследственных радикалов вида $\left\{R^{\Pi}; R^{\Lambda}_{Ab}\right\}$ условие (P1) выполняется тогда и только тогда, когда $\Pi \subseteq \Lambda$. Если в системе сильно наследственных радикалов $\left\{R; R_{Ab}\right\}$ $R = O_{As}$ – нулевой радикал ($O_{As}(U) = O$ для любого $U \in As$), то для такой системы условие (P1) выполняется при любом кручении R_{Ab}. Если в системе сильно наследственных радикалов $\left\{R; R_{Ab}\right\}$ $R_{Ab} = 1_{Ab}$ – тривиальный радикал ($1_{Ab}(A) = A$ для любого $A \in Ab$), то для такой системы условие (P1) выполняется при любом сильно наследственном радикале R. Для системы сильно наследственных радикалов вида $\{1_{As}; R_{Ab}\}$, где 1_{As} – тривиальный радикал ($1_{As}(U) = U$ для любого $U \in As$), условие (P1) выполняется тогда и только тогда, когда $R_{Ab} = 1_{Ab}$. Для системы сильно наследственных радикалов вида $\{R; O_{Ab}\}$, где O_{Ab} – нулевой радикал категории Ab, условие (P1) выполняется тогда и только тогда, когда $R = O_{As}$.*

Доказательство. Если $\Pi \subseteq \Lambda$, то нетрудно проверить, что система нетривиальных сильно наследственных радикалов вида $\left\{R^{\Pi}; R^{\Lambda}_{Ab}\right\}$ согласована.

Обратно, пусть система вида $\left\{R^{\Pi}; R^{\Lambda}_{Ab}\right\}$ согласована, но $\Pi \not\subset \Lambda$ и $\Pi \neq \Lambda$, т.е. существует такое простое число $q \in \Pi$, что $q \notin \Lambda$. Пусть Z_q – кольцо классов вычетов по модулю q. Рассмотрим модуль $(Z_q, Z_q) \in Mod$. Имеем, что $Z_q \cdot R^{\Pi}(Z_q) = Z_q \cdot Z_q \not\subset 0 = R^{\Lambda}_{Ab}(Z_q)$, т.е. что условие (P1) не выполнено для модуля (Z_q, Z_q). Получили противоречие. Значит $\Pi \subseteq \Lambda$.

Второе и третье утверждения леммы проверяются просто.

Докажем теперь два последних утверждения леммы.

Рассмотрим систему сильно наследственных радикалов вида $\{1_{As}; R_{Ab}\}$. При $R_{Ab} = 1_{Ab}$ мы получим тривиальный радикал категории *Mod*. Если же $R_{Ab} \neq 1_{Ab}$, то нетрудно проверить, что, например, для модуля $(Z, Z) \in Mod$, где Z – кольцо целых чисел, условие не выполняется.

Рассмотрим теперь систему сильно наследственных радикалов вида $\{R; O_{Ab}\}$. При $R = O_{As}$ мы получим нулевой радикал категории *Mod*. При $R = 1_{As}$, согласно предыдущему, система $\{1_{As}; O_{Ab}\}$ не является согласованной. Если же $R = R^{\Pi}$ для некоторого набора простых чисел Π и p – некоторое простое число из Π, то нетрудно заметить, что, например, для модуля

$(Z_p, Z_p) \in Mod$, где Z_p – кольцо вычетов, условие (P1) не выполнено. Лемма доказана.

Т е о р е м а 2. *Система строгих радикалов* $\{R; R_U | U \in As\}$ *тогда и только тогда будет определять сильно наследственный радикал в* Mod, *когда* $R_U = R_O$ *для любого* $U \in As$, *т.е. когда эта система имеет вид* $\{R; R_{Ab}\}$, *где или* $R = R^{\Pi}$, $R_{Ab} = R^{\Lambda}_{Ab}$ *для некоторых наборов простых чисел* Π *и* Λ, *удовлетворяющих условию* $\Pi \subseteq \Lambda$, *или* $R = O_{As}$, *а* R_{Ab} *– произвольное кручение в* Ab, *или же* $R_{Ab} = 1_{Ab}$ *и* R *– произвольный сильно наследственный радикал в* As.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предыдущих лемм и замечаний.

Т е о р е м а 3. *Согласованная система строгих радикалов* $\{R; R_U | U \in As\}$ *тогда и только тогда определяет сильный и строгий радикал в категории* Mod, *когда* R *– сильный и строгий радикал в категории* As, *а* R_O *– сильный радикал в категории* Ab.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{R; R_U | U \in As\}$ – такая согласованная система строгих радикалов, что R и R_O являются сильными радикалами, а r – строгий радикал категории Mod, определенный этой согласованной системой строгих радикалов. Пусть (A,U) – некоторый r-полупростой модуль и $(\theta_A, \theta_U):(A,U) \to (B,V)$ – нормальный эпиморфизм. Покажем, что модуль (B,V) r-полупрост.

Д е й с т в и т е л ь н о, так как R – сильный радикал в As, $\theta_U: U \to V$ – нормальный эпиморфизм в As и $(R_U(A), R(U)) = r(A,U) = (O,O)$, т.е. $R(U) = O$, то и $R(V) = O$. С другой стороны, поскольку r – строгий радикал в Mod, то подмодуль (A,O) r-полупростого модуля (A,U) также является r-полупростым, $(R_O(A), O) = r(A,O) = (O,O)$, т.е. $R_O(A) = O$. Отсюда, ввиду того, что $\theta_A: A \to B$ нормальный эпиморфизм в категории Ab и R_O – сильный радикал в Ab, следует, что $R_O(B) = O$. Используя условие (P3), получим, что $r(B,V) = (R_V(B), R(V)) = (R_{R(V)}(B), R(V)) = (R_O(B), O) = (O,O)$.

Обратно, пусть r – сильный строгий радикал в категории Mod и $\{R; R_U | U \in As\}$ – определенная этим строгим радикалом согласованная система строгих радикалов. Покажем, что строгий радикал R является сильным радикалом.

Пусть $\pi: U \to V$ – нормальный эпиморфизм в As и $R(U) = O$. Рассмотрим модули (O,U) и (O,V) категории Mod и гомоморфизм $(O,\pi):(O,U) \to (O,V)$, который, очевидно, является нормальным эпиморфизмом в категории Mod. Поскольку $r(O,U) = (O, R(U)) = (O,O)$ и r – сильный радикал в Mod, то $r(O,V) = (O, R(V)) = (O,O)$, т.е. $R(V) = O$. Значит, R –

сильный радикал в As. Аналогичным образом, рассматривая модули вида (A,O), можно доказать, что R_O – сильный радикал в Ab. Теорема доказана.

Замечание 3. Нетрудно проверить, что сильными и строгими радикалами категории *Mod* будут, в частности, радикалы категории *Mod*, определяемые системами строгих радикалов вида $\{R;1_{Ab}\}$ и $\{O_{As};R_{Ab}\}$, где R – произвольный сильный строгий радикал категории As, а R_{Ab} – произвольный сильный радикал категории Ab.

Теорема 4. *В категории Mod имеется ровно три сильных сильно наследственных радикала: нулевой радикал, тривиальный радикал и радикал, определенный системой* $\{O_{As};1_{Ab}\}$.

Доказательство. Из следствия 4.20 работы ([7]) вытекает, что если r – сильный сильно наследственный радикал, то радикальный класс, соответствующий радикалу r, является подкатегорией локализации. Согласно же теореме 2.1 работы ([8]), в категории *Mod* имеется ровно три подкатегории локализаций, а именно, нулевая подкатегория, состоящая из одного объекта (O,O), вся категория *Mod* и подкатегория *Mod*(Ab), состоящая из всех модулей вида (A, O). Теорема доказана.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении

Գ. Գ. ԷՄԻՆ

Mod կատեգորիայի ժառանգական և ուժեղ խիստ ռադիկալները

Նկարագրված են Mod կատեգորիայի՝ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի իդեալական ժառանգական խիստ, ուժեղ ժառանգական, ուժեղ խիստ և ուժեղ ժառանգական ուժեղ ռադիկալները: Պարզվում է, որ Mod կատեգորիայի ուժեղ ժառանգական ռադիկալները հնարավոր է նկարագրել աբելյան խմբերի ոլորումներին համանմանորեն, պարզ թվերի հավաքածուների, այն է $\Pi \subseteq \Lambda$ *պայմանին բավարարող* Π *և* Λ *պարզ թվերի հավաքածուների օգնությամբ, կամ էլ* $\{O_{As};R_{Ab}\}$ *և* $\{R;1_{Ab}\}$ *ռադիկալների զույգերի միջոցով, որտեղ* O_{As}*-ը՝ ասոցիատիվ օղակների կատեգորիայի զրոյական ռադիկալն է՝ (*$O_{As}(U)=0$ *ցանկացած ասոցիատիվ* U *օղակի համար),* 1_{Ab}*-ը՝ աբելյան խմբերի տրիվիալ ռադիկալը (*$1_{Ab}(A)=A$ *ցանկացած աբելյան* A *խմբի համար),* R_{Ab}*-ը՝ աբելյան խմբերի կատեգորիայի ցանկացած ոլորում է, իսկ* R*-ը՝ ասոցիատիվ օղակների կատեգորիայի ուժեղ ժառանգական կամայական ռադիկալ (դրանք նույնպես հնարավոր է նկարագրել պարզ թվերի հավաքածուների օգնությամբ):*

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В.А.Андрунакиевич, Ю.М.Рябухин*, Радикалы алгебр и структурная теория, М., Наука, 1979. [2] *Е.Г.Шульгейфер*, Сиб. матем. журн., т.7, №6, с.1412-1421 (1966). [3] *Г.Г.Эмин*, Изв. АН АрмССР, Математика, т.14, №3, с.211-232 (1979). [4] *Г.Г.Эмин*, ДАН АрмССР, т.88, №2, с.71-76 (1989). [5] *А.П.Мишина, Л.А.Скорняков*, Абелевы группы и модули, М., Наука, 1969. [6] *P.N.Stewart*, Proc. Amer. Math. Soc., v.39, №2, p.273-278 (1973). [7] *Е.Г.Шульгейфер*, Тр. ММО, т.19, с.271-301 (1968). [8] *Г.Г.Эмин*, Изв. АН АрмССР, Математика, т.15, №2, с.81-95 (1980).