ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

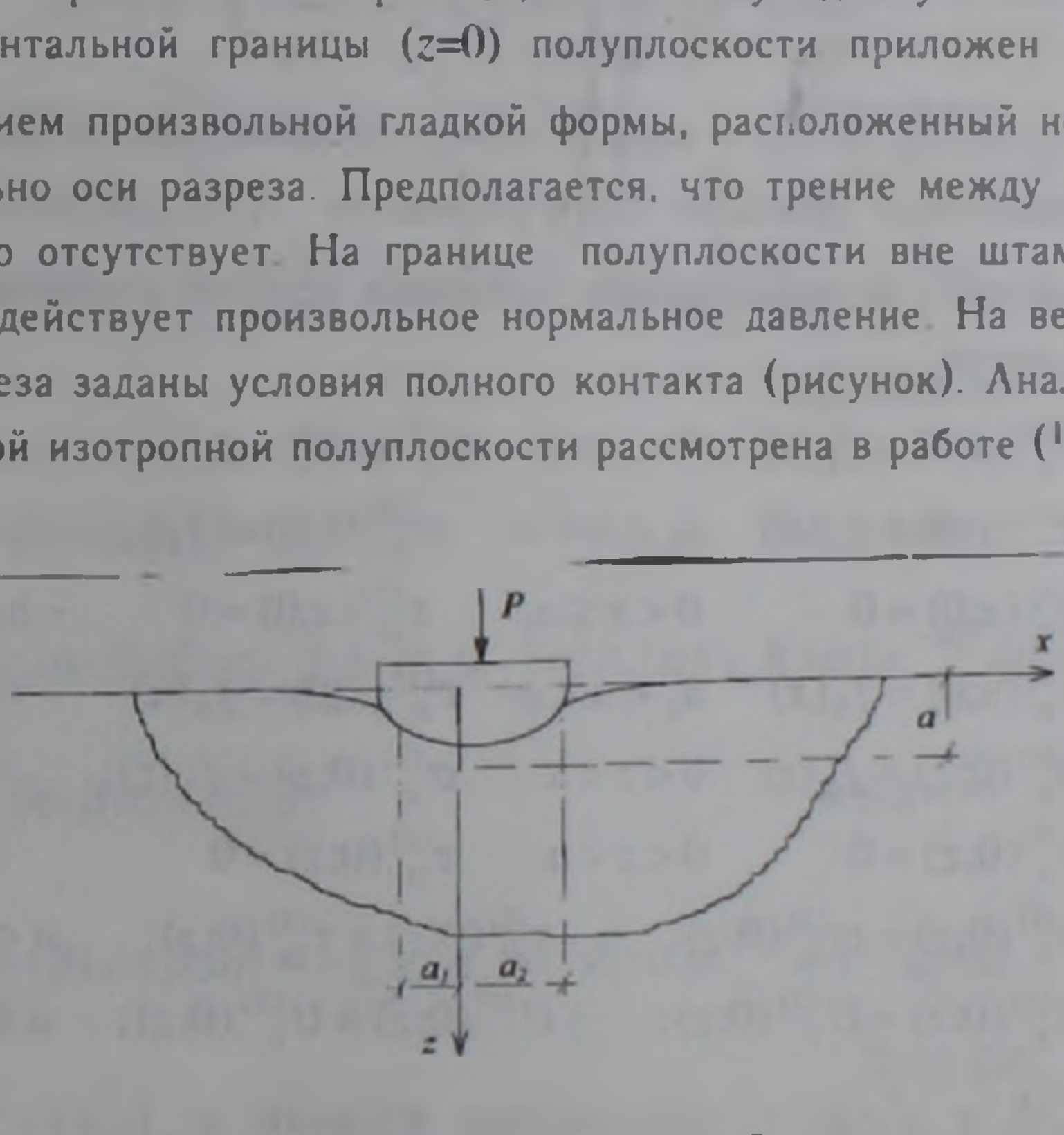
УДК 539.3

С. А. Мелкумян, А. Ж. Григорян

Несимметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом

(Представлено академиком НАН Армении Б. Л. Абрамяном 23/IX 1997)

Рассматривается плоская несимметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости ($z \geq 0$), разрезанной вдоль вертикальной оси ($x=0$), начиная от горизонтальной границы, на конечную длину a. На участке $(-a_2, a_1)$ горизонтальной границы ($z=0$) полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, расположенный несимметрично относительно оси разреза. Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. На границе полуплоскости вне штампа и на кромках разреза действует произвольное нормальное давление. На вертикальной оси вне разреза заданы условия полного контакта (рисунок). Аналогичная задача для упругой изотропной полуплоскости рассмотрена в работе [1].



Решение задачи представлено как сумма решений смешанных задач для двух квадрантов, разделенных осью разреза ($i=1$ для правого квадранта, $i=2$ для левого квадранта). Задача решается методом Фурье в перемещениях. Решение представлено в виде сумм интегралов Фурье:

$$U_x^{(1)}(x;z)=\frac{(-1)^{j+1}}{c_{11}}\int_0^{\infty}\alpha\overline{U}^{(1)}(\alpha;z)\cos\alpha x d\alpha+\frac{(-1)^{j+1}}{c_{11}}\int_0^{\infty}\beta\overline{U}^{(1)}(\beta;x)\cos\beta x d\beta;$$

$$U_z^{(1)}(x;z)=\frac{(-1)^{j}}{c_{44}}\int_0^{\infty}\alpha\overline{W}^{(1)}(\alpha;z)\sin\alpha x d\alpha+\frac{1}{c_{44}}\int_0^{\infty}\beta\overline{W}^{(1)}(\beta;x)\sin\beta x d\beta, \qquad (1)$$

где

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}^{(1)}(\alpha;z)\\ \overline{U}^{(2)}(\alpha;z)\end{Bmatrix}=\sum_{j=1}^{2}\Delta_1(t_j)\begin{Bmatrix}A_j(\alpha)\\ B_j(\alpha)\end{Bmatrix}e^{-\alpha t_j z};\quad \begin{Bmatrix}\overline{U}^{(1)}(\beta;x)\\ \overline{U}^{(2)}(\beta;x)\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2}\begin{Bmatrix}C_k(\beta)\\ D_k(\beta)\end{Bmatrix}e^{(-1)^j\frac{\beta}{t_k}x};$$

$$\begin{Bmatrix}\overline{W}^{(1)}(\alpha;z)\\ \overline{W}^{(2)}(\alpha;z)\end{Bmatrix}=\sum_{j=1}^{2}\Delta_2(t_j)\begin{Bmatrix}A_j(\alpha)\\ B_j(\alpha)\end{Bmatrix}e^{-\alpha t_j z};\quad \begin{Bmatrix}\overline{W}^{(1)}(\beta;x)\\ \overline{W}^{(2)}(\beta;x)\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{2}\Delta_2(t_k)\begin{Bmatrix}C_k(\beta)\\ D_k(\beta)\end{Bmatrix}e^{(-1)^j\frac{\beta}{t_k}x}; \qquad (2)$$

$$\Delta_1(t_j)=\left(\frac{c_{13}}{c_{44}}+1\right)t_j;\quad \Delta_2(t_j)=1-\frac{c_{44}}{c_{11}}t_j^2; \qquad (3)$$

t_j определяется из следующего биквадратного уравнения:

$$\frac{c_{33}}{c_{11}}t^4+\left(\frac{c_{13}\cdot c_{13}}{c_{44}\cdot c_{11}}+2\frac{c_{13}}{c_{11}}-\frac{c_{33}}{c_{44}}\right)t^2+1=0.$$

Здесь c_{11}, c_{13}, c_{33} и c_{44} – модули упругости ортотропного материала.

Неизвестные функции интегрирования $A_j(\alpha), B_j(\alpha), C_k(\beta)$ и $D_k(\beta)$ определяются с использованием граничных условий и условий полного контакта квадрантов

$$\begin{array}{llll}
U_z^{(1)}(x;0)=f_1(x) & 0<x\le a_1 & U_z^{(2)}(x;0)=f_2(x) & -a_2\le x<0\\
\sigma_z^{(1)}(x;0)=f_3(x) & a_1<x<\infty & \sigma_z^{(2)}(x;0)=f_4(x) & -\infty<x<-a_2\\
\tau_{xz}^{(1)}(x;0)=0 & 0<x\le a_1 & \tau_{xz}^{(2)}(x;0)=0 & -a_2<x<0\\
\tau_{xz}^{(1)}(x;0)=f_5(x) & a_1<x<\infty & \tau_{xz}^{(2)}(x;0)=f_6(x) & -\infty<x<-a_2\\
\sigma_x^{(1)}(0;z)=f_7(z) & 0<z<a & \sigma_x^{(2)}(0;z)=f_7(z) & 0<z<a\\
\tau_{zx}^{(1)}(0;z)=0 & 0<z<a & \tau_{zx}^{(2)}(0;z)=0 & 0<z<a\\
\sigma_x^{(1)}(0;z)=\sigma_x^{(2)}(0;z); & & \tau_{zx}^{(1)}(0;z)=\tau_{zx}^{(2)}(0;z); & a<z<\infty\\
U_x^{(1)}(0;z)=U_x^{(2)}(0;z); & & U_z^{(1)}(0;z)=U_z^{(2)}(0;z); & a\le z<\infty
\end{array} \qquad (4)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные функции, а $f_3(x)-f_6(x)$ и $f_7(x)$ – функции, для которых существует интегральное преобразование Фурье. В условиях (4) величины a_1 и a_2 – неизвестные, они подлежат определению в ходе решения задачи. После решения задачи в полученных соотношениях устраняются особенности напряжений и вводятся уравнения, определяющие глубину разреза и зону контакта.

Пользуясь основными соотношениями теории упругости ([2]) и из (1.2), можно все компоненты упругого поля выразить через неизвестные функции интегрирования. Удовлетворяя условиям (4), получены следующие интегральные соотношения и системы "парных" интегральных уравнений:

$$A_j(\alpha) = a_j A_1(\alpha) + d_j \psi_5(\alpha); \qquad B_j(\alpha) = a_j B_1(\alpha) + d_j \psi_6(\alpha); \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{2} b_{2k} [C_k(\beta) - D_k(\beta)] = 0; \qquad \sum_{k=1}^{2} b_{1k} [C_k(\beta) + D_k(\beta)] = -\phi(\beta); \qquad (6)$$

$$\phi(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \sum_{j=1}^{2} a_{1j} a_j \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 [A_1(\alpha) + B_1(\alpha)]}{\alpha^2 t_j^2 + \beta^2} d\alpha + \psi_6(\beta); \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \alpha A_1(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = -\frac{c_{44}}{c_1} f_1(x) - \frac{c_2}{c_1} \psi_5^{+}(x); & 0 < x \le a_1 \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = \sum_{k=1}^{2} \frac{b_{2k}}{c_3} \int_0^{\infty} \beta^2 C_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} a} d\beta - \frac{1}{c_3} [f_3(x) + \psi_5^{-}(x)] \end{cases} \qquad (8)$$

$$a_1 < x < \infty$$

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \alpha B_1(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = -\frac{c_{44}}{c_1} f_2(-x) - \frac{c_2}{c_1} \psi_6^{+}(x); & 0 < x \le a_2 \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 B_1(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = \sum_{k=1}^{2} \frac{b_{1k}}{c_3} \int_0^{\infty} \beta^2 D_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} a} d\beta - \frac{1}{c_3} [f_4(-x) + \psi_6^{-}(x)] \end{cases} \qquad (9)$$

$$a_2 < x < \infty$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} b_{3k} \int_0^{\infty} \beta^2 C_k(\beta) \cos \beta z d\beta = f_7(z); & 0 < z < a \\ \sum_{k=1}^{2} b_{3k} \int_0^{\infty} \beta C_k(\beta) \cos \beta z d\beta = G_1 \sum_{j=1}^{2} \Delta_1(t_j) a_j \int_0^{\infty} \alpha [A_1(\alpha) + B_1(\alpha)] e^{-\alpha t_j} d\alpha + \\ + \xi_1(z) - G_2 \int_0^{\infty} \beta \phi(\beta) \cos \beta z d\beta; & a \le z < \infty \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} b_{1k} \int_0^{\infty} \beta^2 D_k(\beta) \sin \beta z d\beta = -\sum_{j=1}^{2} a_{1j} a_j \int_0^{\infty} \alpha^2 B_1(\alpha) e^{-\alpha t_j} d\alpha - \xi_2(z) \\ \qquad 0 < z < a \\ \sum_{k=1}^{2} b_{1k} \int_0^{\infty} \beta D_k(\beta) \sin \beta z d\beta = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \beta \phi(\beta) \sin \beta z d\beta; \qquad a \le z < \infty \end{cases} \qquad (11)$$

Используя результаты работ ([3-5]), решая "парные" интегральные уравнения (8-11) методом преобразующего оператора ([6]), получены следующие соотношения

$$\alpha A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{a_1} |\varphi_1(t) - \varphi_5^*(t)| J_0(\alpha t)dt - \right.$$

$$\left. -\int_{a_1}^{\infty} t|\varphi_3(t) + \varphi_5^{**}(t)| J_0(\alpha t)dt + \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) J_0(\alpha t)dt \right\}; \quad (12)$$

$$\alpha B_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{a_2} |\varphi_2(\tau) - \varphi_6^*(\tau)| J_0(\alpha\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. -\int_{a_2}^{\infty} \tau|\varphi_4(\tau) + \varphi_6^{**}(\tau)| J_0(\alpha\tau)d\tau + \int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) J_0(\alpha\tau)d\tau \right\}; \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{2} b_{3k}\beta C_k(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^a r\varphi_7(r) J_0(\beta r)dr - G_3\int_a^{\infty} r\varphi_8(r) J_0(\beta r)dr -$$

$$-\frac{2}{\pi} G_4\int_a^{\infty} \varphi_8^*(r) J_0(\beta r)dr + \frac{2}{\pi}\int_a^{\infty} F_5(r) J_0(\beta r)dr; \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{2} b_{1k}\beta D_k(\beta) = \int_0^a r\varphi_6(r) J_1(\beta r)dr + \int_a^{\infty} r\varphi_8^{**}(r) J_1(\beta r)dr -$$

$$-\int_0^a F_3(r) J_1(\beta r)dr - \int_a^{\infty} F_4(r) J_1(\beta r)dr; \quad (15)$$

где $\varphi_i; \varphi_i^*; \varphi_i^{**}, \psi_i; \psi_i^*; \psi_i^{**}; \xi_i$ выражаются через известные функции:

$$F_1(t) = \sum_{k=1}^{2} \frac{b_{2k}}{C_3} t\int_0^{\infty} \beta^2 C_k(\beta) K_0\left(\frac{\beta t}{t_k}\right)d\beta;$$

$$F_2(\tau) = \sum_{k=1}^{2} \frac{b_{2k}}{C_3} \tau\int_0^{\infty} \beta^2 C_k(\beta) K_0\left(\frac{\beta\tau}{t_k}\right)d\beta; \quad (16)$$

$$F_3(r) = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} a_j r\int_0^{\infty} \alpha^2\left[L_1(\alpha t_j r) - I_1(\alpha t_j r) + \frac{2}{\pi}\right] B_1(\alpha)d\alpha; \quad (17)$$

$$F_4(r) = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} a_j \frac{r}{2}\int_0^{\infty} \alpha^2\left[L_1(\alpha t_j r) - I_1(\alpha t_j r) + \frac{2}{\pi}\right]\{A_1(\alpha) + B_1(\alpha)\}d\alpha;$$

$$F_5(r) = \sum_{j=1}^{2} G^{(j)} r\int_0^{\infty} \alpha^2 K_0(\alpha t_j r)\left[A_1(\alpha) + B_1(\alpha)\right]d\alpha$$

Здесь $K_\nu(z)$ – функция Макдональда: $I_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента: $L_\nu(z)$ – функция Струве от мнимого аргумента; $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Подставляя значения функций $\alpha A_1(\alpha), \alpha B_1(\alpha)$ по формулам (12), (13) в (16), учитывая формулы (6), (14), (15) для определения неизвестных функций $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$, получаем систему интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода:

$$F_1(y) = \Omega_1(y) + \int_{a_1}^{\infty} K_1(y;t)F_1(t)dt + \int_{a_2}^{\infty} K_2(y;\tau)F_2(\tau)d\tau;$$
$$F_2(y) = \Omega_2(y) + \int_{a_1}^{\infty} K_3(y;t)F_1(t)dt + \int_{a_2}^{\infty} K_4(y;\tau)F_2(\tau)d\tau. \qquad (18)$$

Из-за объемности $\Omega_i(y)$ и $K_i(y;t)$ их выражения в настоящей статье не представляются.

Систему (18) можно решить методом последовательных приближений, при условии, что для ядер системы интегральных уравнений выполняются оценки

$$\int_{a_1}^{\infty}|K_1(y;t)|dt + \int_{a_2}^{\infty}|K_2(y;\tau)|d\tau < 1;$$
$$\int_{a_1}^{\infty}|K_3(y;t)|dt + \int_{a_2}^{\infty}|K_4(y;\tau)|d\tau < 1,$$

а функции $\Omega_i(y)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $y \to \infty$. После этого, решая систему (18), определяются $F_1(y)$ и $F_2(y)$. По формулам (5)-(7), (12)-(15) и (17) последовательно можно определить все искомые функции.

Далее, используя основные соотношения теории упругости ([2]), можно определить напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

В частности:

нормальные напряжения под штампом определяются по формулам:

$$\sigma_z^{(1)}(x;0) = \frac{2c_3 x}{\pi a_1\sqrt{a_1^2 - x^2}}\{F_1(a_1) - \varphi_1(a_1) + \varphi_5^{\bullet}(a_1) -$$
$$-a_1|\varphi_3(a_1) + \varphi_5^{\bullet\bullet}(a_1)|\} + W_1(x), \qquad 0 < x < a_1; \qquad (19)$$
$$\sigma_z^{(2)}(x;0) = \frac{2c_3 x}{\pi a_2\sqrt{a_2^2 - x^2}}\{F_2(a_2) - \varphi_2(a_2) + \varphi_6^{\bullet}(a_2) -$$
$$-a_2|\varphi_4(a_2) + \varphi_6^{\bullet\bullet}(a_2)|\} + W_2(x), \qquad 0 < x < a_2;$$

нормальные и касательные напряжения вне разреза определяются по формулам:

$$\sigma_x(0;z) = \frac{2z}{\pi a\sqrt{z^2 - a^2}} \cdot$$
$$\left\{-G_4\varphi_8^{\bullet}(a) + F_5(a) - a\left[\varphi_7(a) + \frac{\pi}{2}G_3\varphi_8(a)\right]\right\} + W_3(z), \qquad a < z < \infty; \qquad (20)$$

$$\tau_{zx}(0;z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}\left|F_3(a) - F_4(a) + a\left|\varphi_8^{\bullet\bullet}(a) - \varphi_6(a)\right|\right| + W_4(z),\ a < z < \infty; \qquad (21)$$

нормальные перемещения вне штампа определяются по формулам:

$$U_z^{(1)}(x;0) = -\frac{2c_1}{\pi c_{44}}\left\{\int_0^{a_1}\frac{|\varphi_1(t)-\varphi_5^*(t)|}{\sqrt{x^2-t^2}}dt - \int_{a_1}^{x}\frac{t|\varphi_3(t)+\varphi_5^{**}(t)|}{\sqrt{x^2-t^2}}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{a_1}^{x}\frac{F_1(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right\} - \frac{c_2}{c_{44}}\psi_5^*(x), \qquad a_1 \le x < \infty;$$

$$U_z^{(2)}(x;0) = -\frac{2c_1}{\pi c_{44}}\left\{\int_0^{a_2}\frac{|\varphi_2(\tau)-\varphi_6^*(\tau)|}{\sqrt{x^2-\tau^2}}d\tau - \int_{a_2}^{x}\frac{\tau|\varphi_4(\tau)+\varphi_6^{**}(\tau)|}{\sqrt{x^2-\tau^2}}d\tau + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \int_{a_2}^{x}\frac{F_2(\tau)}{\sqrt{x^2-\tau^2}}d\tau\right\} - \frac{c_2}{c_{44}}\psi_6^*(x), \qquad a_2 \le x < \infty;$$

перемещения в разрезе определяются по формулам:

$$U_x^{(1)}(0;z) = -\frac{2}{\pi c_{11}}\sum_{j=1}^{2}\Delta_1(t_j)a_j\left\{\int_0^{a_1}\frac{[\varphi_1(t)-\varphi_5^*(t)]}{\sqrt{z^2t_j^2+t^2}}dt - \right.$$

$$\left. - \int_{a_1}^{\infty}\frac{t[\varphi_3(t)+\varphi_5^{**}(t)]}{\sqrt{z^2t_j^2+t^2}}dt + \int_{a_1}^{\infty}\frac{F_1(t)}{\sqrt{z^2t_j^2+t^2}}dt\right\} + \mu_1(z), \qquad 0 < z \le a;$$

$$U_x^{(2)}(0;z) = -\frac{2}{\pi c_{11}}\sum_{j=1}^{2}\Delta_1(t_j)a_j\left\{\int_0^{a_2}\frac{[\varphi_2(\tau)-\varphi_6^*(\tau)]}{\sqrt{z^2t_j^2+\tau^2}}d\tau - \right. \tag{23}$$

$$\left. - \int_{a_2}^{\infty}\frac{\tau[\varphi_4(\tau)+\varphi_6^{**}(\tau)]}{\sqrt{z^2t_j^2+\tau^2}}d\tau + \int_{a_2}^{\infty}\frac{F_2(\tau)}{\sqrt{z^2t_j^2+\tau^2}}d\tau\right\} + \mu_2(z), \qquad 0 < z \le a;$$

Из условия непрерывности нормальных напряжений можно определить размер контакта ([7]):

$$F_1(a_1) - \varphi_1(a_1) + \varphi_5^*(a_1) - a_1[\varphi_3(a_1) + \varphi_5^{**}(a_1)] = 0;$$

$$F_2(a_2) - \varphi_2(a_2) + \varphi_6^*(a_2) - a_2[\varphi_4(a_2) + \varphi_6^{**}(a_2)] = 0; \tag{24}$$

$$-G_4\varphi_8^*(a) + F_5(a) - a[\varphi_7(a) + \frac{\pi}{2}G_3\varphi_8(a)] = 0.$$

Приравниванием значений коэффициентов интенсивности напряжений (20, 21) к критическим значениям ($K_I = K_c$, $K_{II} = K_c$) по теории хрупкого разрушения ([8]) получаются выражения, которые определяются распространение трещины:

$$K_I = \frac{2}{\pi}\left\{-G_4\varphi_8^{\bullet}(a) + F_5(a) - a\left[\varphi_7(a) + \frac{\pi}{2}G_3\varphi_8(a)\right]\right\};$$

$$K_{II} = F_3(a) - F_4(a) + a|\varphi_8^{\bullet\bullet}(a) - \varphi_6(a)|.$$

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ա. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ, Ա. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Վերջավոր ուղղածիգ ճեղքով օրթոտրոպ կիսահարթության ոչ համաչափ կոնտակտային խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է հորիզոնական եզր դուրս եկող վերջավոր երկարությամբ ուղղաձիգ ճեղքով առաձգական, օրթոտրոպ կիսահարթության ոչ համաչափ կոնտակտային խնդիրը, երբ հորիզոնական եզրի վերջավոր հատվածում ճնշում է առանցքի նկատմամբ ոչ համաչափ տեղադրված կամայական ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմը: Են-թադրվում է, որ դրոշմի և կիսահարթության միջև շփումը բացակայում է, իսկ հորիզոնական եզրում դրոշմից դուրս, և ճեղքի եզրերում գործում են կամայական նորմալ լարումներ:

Ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդի կիրառությամբ ցույց է տրված նշված խնդրի հնարավոր լուծման բերումը Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի դիտարկմանը:

Ստացված են դրոշմի տակ և ճեղքից դուրս լարումների, ինչպես նաև դրոշմից դուրս և ճեղքում տեղափոխությունների որոշման բանաձևերը: Տրված են կոնտակտի չափի որոշման համար և ճեղքի տարածումը բնորոշող անհրաժեշտ հավասարումները:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В.С.Тоноян, А.Ф.Минасян,* ДАН Арм.ССР, т.61, №5, с.289-297 (1975). [2] *Р.Крестенсен,* Введение в механику композитов, М., Мир, 1982. [3] *В.С.Тоноян,* Изв. АН Арм.ССР. Механика, т.21, №3, с.3-18 (1968). [4] *В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян,* Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.24, №4, с.3-17 (1971). [5] *С.А.Мелкумян,* ДАН Арм.ССР, т.55, №2, с.87-93 (1972). [6] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик,* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962. [7] *А.А.Баблоян, М.Г.Мелконян,* Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.27, №5, с.3-17 (1974). [8] *Г.П.Черепанов,* Механика хрупкого разрушения, М., Наука, 1974.