ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3.518

А. В. Саакян

Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 17/VII 1997)

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение второго рода

$$\int_{-1}^{1}\frac{\chi(x)}{x-y}dx+\pi\lambda\chi(y)=f(y)\qquad(-1<y<1),\tag{1}$$

где λ – комплексное число, $\chi(x)$ – комплекснозначная неизвестная функция, $f(y)$ – заданная комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию Гельдера.

Используя известные результаты Н.И.Мусхелишвили [1] о поведении сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования, решение уравнения (1) представим в виде

$$\chi(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\varphi(x)=\omega(x)\varphi(x),\tag{2}$$

где α и β определяются из системы

$$\begin{array}{l}\cot\pi\alpha+\lambda=0\\ \cot\pi\beta-\lambda=0\end{array}\qquad \mathrm{Re}\,\alpha,\ \mathrm{Re}\,\beta>-1\qquad \alpha+\beta=\kappa=\begin{cases}-1\\0\\1\end{cases}\tag{3}$$

и выбираются соответственно индексу κ поставленной задачи, а функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на всем отрезке $[-1,1]$.

Поскольку весовой функции $\omega(x)$ соответствуют многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ с комплексными параметрами α и β, а методология построения приближенного решения уравнения (1) является обобщением метода дискретных особенностей для сингулярных интегральных уравнений второго рода с вещественным коэффициентом, описанного в работе [2], то построим уравнение, заданное в комплексной плоскости, которое на отрезке $[-1,1]$ совпадает с уравнением (1).

Таким уравнением будет

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)\omega(x)}{x-z}dx+\frac{\pi\lambda}{\cos\pi\alpha}(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\varphi(z)=f(z),\qquad (z\in D),\qquad (4)$$

где D – конечная область комплексной плоскости, охватывающая отрезок $[-1,1]$ действительной оси и корни многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ и $P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(z)$ (κ – индекс поставленной задачи) ([3]), а $\varphi(z)$ и $f(z)$ аналитические продолжения соответствующих функций.

Неизвестную функцию $\varphi(z)$ заменим интерполяционным многочленом $\varphi_n(z)$, определяемым формулой

$$\varphi_n(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{(z-z_i)P_n'^{(\alpha,\beta)}(z_i)}\quad (z\in D), \qquad (5)$$

где $\varphi_i=\varphi(z_i)$, $\{z_i\}_{i=1}^{n}$ – корни многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$.

Подставляя (5) в уравнение (4), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i g(z)}{(z-z_i)P_n'^{(\alpha,\beta)}(z_i)}=f(z)\quad (z\in D), \qquad (6)$$

где

$$g(z)=\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-z}dx+\frac{\pi\lambda}{\cos\pi\alpha}(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)-$$
$$-\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-z_i}dx. \qquad (7)$$

Известное (4) спектральное соотношение для полиномов Якоби, справедливое для всех точек комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1,1]$,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-z}dx-\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=$$

$$=-2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}F\left(n+1,-n-\alpha-\beta;1-\alpha;\frac{1-z}{2}\right)$$

при параметрах α и β, удовлетворяющих условиям (3), принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-z}dx+\frac{\pi\lambda}{\cos\pi\alpha}(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=-\frac{2^{\kappa}\pi}{\sin\pi\alpha}P_{n+\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(z). \qquad (8)$$

Используя последнее соотношение, для функции $g(z)$ получим

$$g(z) = -\frac{2^\kappa \pi}{\sin \pi\alpha}\left| P_{n+\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(z) - P_{n+\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(z_i)\right|.$$

Если, согласно полученному выражению, уравнение (6) приравнять в корнях полинома Якоби $P_{n+\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(z)$, т.е. положить $z = \zeta_j$, $P_{n+\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(\zeta_j) = 0$ $(j = 1,2,\ldots,n+\kappa)$, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно φ_i

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\varphi_i}{(z_i - \zeta_j)} = f(\zeta_j) \quad (j = 1,2,\ldots,n+\kappa), \tag{9}$$

где

$$a_i = -\frac{2^\kappa \pi}{\sin \pi\alpha}\cdot\frac{P_{n+\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(z_i)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(z_i)}$$

или, учитывая, что $P_n'^{(\alpha,\beta)}(z) = \dfrac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z)$,

$$a_i = -\frac{2^{\kappa+1}\pi}{(n+\kappa+1)\sin \pi\alpha}\cdot\frac{P_{n+\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(z_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z_i)}.$$

Рассмотрим различные значения индекса κ. Пусть $\kappa = -1$. В этом случае уравнение (1) не имеет единственного решения, и для его решения необходимо задать дополнительное условие, например

$$\int_{-1}^{1}\chi(x)dx = C. \tag{10}$$

Необходимость дополнительного условия следует и из самой системы (9), поскольку при рассматриваемом значении индекса число уравнений системы меньше числа неизвестных. Дискретизируя условие (10) и добавляя к системе (9), получим замкнутую систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\varphi_i}{(z_i - \zeta_j)} = f(\zeta_j) \quad (j = 1,2,\ldots,n-1),\\ \sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i = C.\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $\kappa = 0$. В этом случае уравнение (1) имеет единственное решение, которое определяется из системы

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\varphi_i}{(z_i - \zeta_j)} = f(\zeta_j) \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{12}$$

Пусть теперь $\kappa = 1$. В этом случае уравнение (1) имеет решение только при выполнении условия

$$\int_{-1}^{1}(1-y)^{-\alpha}(1+y)^{-\beta}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\chi(x)}{x-y}dx+\pi\lambda\chi(y)\right]dy=0, \qquad (13)$$

а число уравнений системы (9) превосходит число неизвестных, т.е. система переопределена. Следуя работам ([2,5]), систему (9) запишем в виде

$$\gamma_n+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\varphi_i}{(z_i-\zeta_j)}=f(\zeta_j) \quad (j=1,2,\ldots,n+1). \qquad (14)$$

где γ_n – регуляризирующая неизвестная ([5]), которая при возрастании n стремится к нулю тогда и только тогда, когда выполняется условие (13), и тем самым является индикатором его выполнения.

Если $f(y)$ является многочленом степени $n+\kappa$, то получаем точное решение, поскольку $\varphi(z)=\varphi_n(z)$. Если функция $f'(y)$ удовлетворяет условию Гельдера, то из результатов ([6]) следует

$$\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\le 0\,(E'_{n+\kappa+1}),$$

где $E'_{n+\kappa+1}$ – наилучшее приближение функции $f'(y)$ многочленами степени $n+\kappa$-1.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\int_{-1}^{1}\frac{\chi(x)}{x-y}dx+\pi\lambda\chi(y)+\int_{-1}^{1}K(x,y)\chi(x)dx=f(y) \quad (-1\le y\le 1),$$

где $K(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера на квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$ и аналитически продолжима в область D. Это уравнение также имеет решения индекса $\kappa=-1,0,1$, и его решение можно получить из соответствующих уравнению (1) дискретных уравнений, если под знаком суммы добавить слагаемое $a_iK(z_i,\zeta_j)\varphi_i$.

Институт механики НАН Армении

Ա. Վ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Կոմպլեքս գործակցով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման թվային եղանակ

Ներկա աշխատանքում առաջարկվում է կոմպլեքս գործակցով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման թվային եղանակ: Թվային եղանակը հիմնված է ֆունկցիաների մոտարկման քառակուսային բանաձևերի կիրառման և Ցակոբիի բազմանդամների համար հայտնի սպեկտրալ առնչության օգտագործման վրա, ինչը թույլ է տալիս սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծումը բերել որոշակի կետերում անհայտ ֆունկցիայի արժեքների նկատմամբ հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր համակարգի:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н.И.Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., Наука, 1968. [2] *И.К.Лифанов, А.В.Саакян*, ПММ, т.46, вып.3 (1982). [3] *Г.Сеге*, Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962. [4] *Г.Бейтмен., А.Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, СМБ, т.2, М., Наука, 1966. [5] *И.К.Лифанов*, ДАН СССР, т.255, №5 (1980). [6] *А.А.Корнейчук*, в кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., Наука, 1964.