ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №4

МЕХАНИКА

УДК 239.374

Академик НАН Армении **М. А. Задоян**

Напряжения в окрестности угловой точки плиты

(Представлено 26/IX 1997)

Классическая теория изгиба плит, как отмечено Б.Галеркиным ([1]) еще в 20-х годах, из-за известных недостатков не позволяет получить правильную картину напряженного состояния в окрестности угловой точки плиты. Для исследования местных напряжений в угловых точка плиты естественно использовать уточненные теории ([2-4]) изгиба плит.

Рассматривается напряженное состояние в окрестности краевого ребра плиты при учете поперечных сдвигов, изготовленного из несжимаемого и упрочняющегося по степенному закону материала. Принимаем, что между интенсивностями напряжений и деформаций существует зависимость

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m .$$

При учете условия несжимаемости материала

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0,$$

а также пренебрежении σ_z, зависимости между компонентами напряжений и деформаций принимают форму

$$\sigma_r = 4k\varepsilon_0^{m-1}\left(\varepsilon_r + \frac{1}{2}\varepsilon_\theta\right)_{(r,\theta)}; \quad \tau_{r\theta} = 2k\varepsilon_0^{m-1}\gamma_{r\theta}\ {}_{(r,\theta,z)};$$
$$\varepsilon_0 = 2\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{rz}^2}. \quad (1)$$

Имеем дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + Q_r = 0,$$
$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}M_{r\theta} + Q_\theta = 0,. \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r}Q_r=0$$

Следуя Вашидзу ([2]), разлагая перемещения в ряд Тейлора по степеням z, берем их в следующей форме:

$$u=z\phi(r,\theta),\ v=z\Psi(r,\theta),\ w=w(r,\theta), \tag{3}$$

где ϕ,Ψ,w искомые функции r,θ .

Таким образом, будем иметь

$$\varepsilon_0=\sqrt{\gamma^2+4\omega^2z^2},$$

где:

$$\gamma^2=\left(\phi+\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\Psi+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\omega^2=\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2+\frac{\partial \phi}{\partial r}\left(\frac{\phi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\phi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}-\frac{\Psi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2.$$

Компоненты напряжения представляются в форме:

$$\sigma_{ij}=\frac{4kzF_{ij}(r,\theta)}{\left|\sqrt{\gamma^2+4\omega^2z^2}\right|^{1-m}},\ \tau_{zi}=\frac{kG_{zi}(r,\theta)}{\left|\sqrt{\gamma^2+4\omega^2z^2}\right|^{1-m}},$$

причем в первой формуле вместо ij имеем r,θ и $r\theta$, а во второй формуле вместо i индексы r и θ, где

$$F_r=\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right),\quad G_{rz}=\phi+\frac{\partial w}{\partial r},$$

$$F_\theta=\frac{\phi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial r},\quad G_{\theta z}=\Psi+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

$$F_{r\theta}=\frac{\partial \Psi}{\partial r}-\frac{\Psi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

Моменты и перерезывающие силы будут определены из следующих выражений:

$$M_r=kJ\omega^{m-1}F_{r\ (r,\theta)},\ M_{r\theta}=\frac{1}{4}kJ\omega^{m-1}F_{r\theta},$$

$$Q_r=kI\omega^{m-1}\left(\phi+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\ Q_\theta=kI\omega^{m-1}\left(\Psi+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right), \tag{4}$$

где

$$J(r,\theta)=\int_0^h\frac{x^2dx}{\left|\sqrt{x^2+q^2}\right|^{1-m}},\ I(r,\theta)=\int_0^h\frac{dx}{\left|\sqrt{x^2+q^2}\right|^{1-m}} \tag{5}$$

$$q=\frac{\gamma}{\omega}=\frac{\sqrt{\left(\phi+\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\Psi+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2+\frac{\partial \phi}{\partial r}\left(\frac{\phi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\phi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}-\frac{\Psi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2}}. \qquad (6)$$

Содержащиеся в (3) неизвестные функции ищем в следующей форме:

$$\phi=r^{\lambda}\varphi(\theta,\lambda),\ \ \Psi=r^{\lambda}\psi(\theta,\lambda),\ \ w=r^{\lambda+1}f(\theta,\lambda), \qquad (7)$$

где φ, ψ, f неопределенные функции θ, а λ неопределенный параметр.

Из (5) получаем

$$q=r\mathrm{M}(\theta),$$

где

$$\mathrm{M}=\frac{\sqrt{(f'+\psi)^2+[\varphi+(\lambda+1)f]^2}}{\sqrt{\psi'^2+(\lambda+2)\varphi\psi'+(\lambda^2+\lambda+1)\varphi^2+\frac{1}{4}[\varphi'+(\lambda-1)\psi]^2}}. \qquad (8)$$

Моменты из выражения (4) перепишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_r &= kJr^{(\lambda-1)m}\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{1}{2}\psi'\right]\chi, \\ M_\theta &= kJr^{(\lambda-1)m}\left[\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi+\psi'\right]\chi, \qquad (9) \\ M_{r\theta} &= \frac{1}{4}kJr^{(\lambda-1)m}[\varphi'+(\lambda-1)\psi]\chi, \end{aligned}$$

а перерезывающих сил:

$$\begin{aligned} Q_r &= kIr^{(\lambda-1)m+1}[\varphi+(\lambda+1)f]\chi, \\ Q_\theta &= kIr^{(\lambda-1)m+1}(f'+\psi)\chi, \end{aligned} \qquad (10)$$

где

$$\chi=\left(\sqrt{\psi'^2+(\lambda+2)\varphi\psi'+(\lambda^2+\lambda+1)\varphi^2+\frac{1}{4}[\varphi'+(\lambda-1)\psi]^2}\right)^{m-1}.$$

Из (5) и (8) легко получить, что при $r\to 0$

$$J=h^{m+2}/(m+2),\ I=h^m/m.$$

Подставляя (9) и (10) в (2), для окрестности $r=0$ получаем систему из трех дифференциальных уравнений

$$\left\{\left[\varphi' + (\lambda - 1)\psi\right]\chi\right\}' + 2\left\{\left[(\lambda - 1)m - 1\right]\psi' + (\lambda - 1)\left[1 + (2\lambda + 1)m\right]\varphi\right\}\chi = 0,$$

$$\left\{\left[\psi' + \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)\varphi\right]\chi\right\}' + \frac{1}{4}\left[(\lambda - 1)m + 2\right]\left[\varphi' + (\lambda - 1)\psi\right]\chi = 0, \qquad (11)$$

$$\left[(f' + \psi)\chi\right]' + \left[(\lambda - 1)m + 2\right]\left[\varphi + (\lambda + 1)f\right]\chi = 0.$$

Возможны различные комбинации граничных условий. Когда боковые стороны плиты $\theta = \pm\alpha$ свободны от внешних воздействий, имеем

$$M_\theta = M_{r\theta} = Q_\theta = 0 \text{ , при } \theta = \pm\alpha .$$

Согласно (9) и (10) будем иметь

$$\psi' + \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)\varphi = 0, \; \varphi' + (\lambda - 1)\psi = 0,$$

$$f' + \psi = 0 \text{ при } \theta = \pm\alpha . \qquad (12)$$

Систему (11), с однородными условиями (12), можно рассматривать как задачу собственного значения, определяющую в принципе λ в зависимости от параметров α и m.

Первая пара уравнений (11), с граничными условиями первой строки (12), составляет самостоятельную задачу для определения $\lambda = \lambda(\alpha, m)$.

Указанную систему дифференциальных уравнений можно привести к каноническому виду. С этой целью предварительно определяем соотношения

$$\chi' / \chi = -\frac{1 - m}{S}\left\{4\left[\psi' + \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)\varphi\right]\psi'' + \left[\varphi' + (\lambda - 1)\psi\right]\varphi'' + \right.$$

$$\left. + 3(\lambda + 1)\varphi'\psi' + (\lambda - 1)^2\psi\psi' + 4(\lambda^2 + \lambda + 1)\varphi\varphi'\right\},$$

$$S = 4\left[\psi' + \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)\varphi\right]^2 + \left[\varphi' + (\lambda - 1)\psi\right]^2 + 3\lambda^2\varphi^2 .$$

Используя эти соотношения, указанную систему дифференциальных уравнений из (11) можно привести к системе из двух линейных уравнений относительно φ'' и ψ'', после разрешения которой получаем

$$\varphi'' = \frac{BN + CH}{AC - B^2}, \; \psi'' = \frac{AN + BH}{AC - B^2} , \qquad (13)$$

где:

$$A=\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]^2+\frac{m}{4}\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right]^2+\frac{3}{4}\lambda^2\varphi^2,$$

$$B=(1-m)\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right],$$

$$C=4m\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]^2+\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right]^2+3\lambda^2\varphi^2,$$

$$\begin{gathered}H=-\left\{\left[\lambda-3+2(\lambda-1)m\right]\psi'+2(\lambda-1)\left[1+(1+2\lambda)m\right]\varphi\right\}\cdot\\ \cdot\left\{\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]^2+\frac{1}{4}\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right]^2+\frac{3}{4}\lambda^2\varphi^2\right\}+\\ +\frac{1-m}{4}\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right]\left[3(\lambda+1)\varphi'\psi'+(\lambda-1)^2\psi\psi'+4(\lambda^2+\lambda+1)\varphi\varphi'\right],\end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}N=-\left\{\left[\lambda+3+\frac{(\lambda-1)m}{2}\right]\frac{\varphi'}{2}+\left[1+\frac{(\lambda-1)m}{2}\right]\frac{\lambda-1}{2}\psi\right\}\cdot\\ \cdot\left\{4\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]^2+\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right]^2+3\lambda^2\varphi^2\right\}+\\ +(1-m)\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]\left[3(\lambda+1)\varphi'\psi'+(\lambda-1)^2\psi\psi'+4(\lambda^2+\lambda+1)\varphi\varphi'\right].\end{gathered}$$

Легко заметить, что

$$\begin{gathered}AC-B^2>\left\{4m\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]^2+\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right]^2+3\lambda^2\varphi^2\right\}\cdot\\ \cdot\left\{\frac{m}{4}\left[\varphi'+(\lambda-1)\psi\right]^2+\frac{3}{4}\lambda^2\varphi^2\right\}+\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]^2\cdot\\ \cdot\left\{3\lambda^2\varphi^2+4m\left[\psi'+\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\right]^2\right\}>0.\end{gathered}$$

Система (13), с условиями первой строки (12), приводится к системе из четырех уравнений первых порядков.

В случае линейно деформируемого материала, полагая $m=1$, из (13) находим систему из двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\varphi''+(3\lambda-5)\psi'+4(\lambda^2-1)\varphi=0,\\ \psi''+\frac{1}{4}(3\lambda+5)\varphi'+\frac{1}{4}(\lambda^2-1)\psi=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Отсюда из второго уравнения определяем

$$\varphi = N_1 - \frac{1}{3\lambda + 5}\int_0^{\theta}\left| 4\psi'' + (\lambda^2 - 1)\psi \right| d\theta , \tag{16}$$

где N_1 произвольная постоянная. Подставляя φ в первом уравнении (15) и дифференцируя, приходим к уравнению

$$\varphi^{IV} + 2(\lambda^2 + 1)\psi'' + (\lambda^2 - 1)^2 \psi = 0,$$

решение которого будет

$$\psi = a\cos(\lambda + 1)\theta + b\sin(\lambda + 1)\theta + c\cos(\lambda - 1)\theta + d\sin(\lambda - 1)\theta , \tag{17}$$

где a, b, c, d произвольные постоянные. Далее, используя (17), из (16) находим

$$\varphi = a\sin(\lambda + 1)\theta - b\cos(\lambda + 1)\theta + \frac{3\lambda - 5}{3\lambda + 5}c\sin(\lambda - 1)\theta - \frac{3\lambda - 5}{3\lambda + 5}d\cos(\lambda - 1)\theta . \tag{18}$$

Исходя из (17), (18) и из первой строки граничных условий (12) для симметричного и кососимметричного изгиба плиты приходим к уравнениям

$$\lambda \sin 2\alpha \pm \sin 2\lambda\alpha = 0 .$$

Ранее такой же результат получен в работе Бартона и Синклайра ([5]) при исследовании напряженного состояния в окрестности угловой точки линейно-упругой плиты при поперечном изгибе. Исследования ([5]) основаны на уточненной теории изгиба плит Э. Рейснера ([3]).

Сравнивая выражения моментов (9) и перерезывающих сил (10) с соответствующими выражениями, полученными на основании классической теории изгиба плит ([6,7]), заключаем, что при учете поперечных сдвигов порядок концентрации моментов (напряжений) сохраняется, между тем перерезывающие силы, вопреки классической теории, остаются конечными и стремятся к нулю при $r \to 0$.

Аналогичный результат при учете поперечных сдвигов ранее получен в работах ([8-10]) при исследовании концентрации напряжений на кромке трещины линейно-упругих плит.

Институт механики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Լարումները սալի անկյունային կետի շրջակայքում

Ուսումնասիրվում է անսեղմելի և աստիճանային օրենքով ամրապնդվող նյութից պատրաստված սալի անկյունային կետի շրջակայքում լարումների վարքը, երբ հաշվի են առնվում լայնական սահքերը: Հետազոտությունը հանգում է սեփական արժեքների որոշմանը երկու երկրորդ կարգի ոչ-գծային դիֆերենցիալ հավասարումներից բաղկացած համակարգի համար՝ համապատասխան համասեռ եզրային պայմանների դեպքում: Մասնավորապես քննարկվում է գծային նյութի դեպքը, երբ հավասարումները ինտեգրվում են վերջավոր

տեսքով: Դասական տեսության համեմատությամբ մոմենտների (լարումների) կարգը մնում է նույնը, սակայն կտրող ուժերը ուսումնասիրվող կետի շրջակայքում վերջավոր են և ձգտում են զրոյի:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б.Г.Галеркин*, Собр. соч., т.2, М., Изд-во АН СССР, 1953. [2] *К.Васидзу*, Вариационные методы в теории упругости и пластичности, М., Мир, 1987. [3] *E.Reissner*, J. of Mathem. and Physics, v.23, №4, p.184-191 (1944). [4] *С.А.Амбарцумян*, Теория анизотропных пластин, М., Наука, 1987. [5] *W.S.Burton, G.B.Sinclair*, J.Appl.Mech., v.53, №1, p.220-222 (1986). [6] *M.L.Williams*, J.Appl.Mech., v.28, p.78-82 (1961). [7] *М.А.Задоян*, Докл.РАН, т.332, №3, с.319-321 (1993). [8] *R.J.Hartranft, G.J.Sih*, J. Math. Phys., v.47, p.276-291 (1968). [9] *N.J.Pagano, G.C.Sih*, J. Solids and structures, v.4, p.591 (1968). [10] *Э.В.Белубекян*, ДАН Арм.ССР, т.49, №5, с.225-232 (1969).