ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №4

МЕХАНИКА

УДК 531.1

В. В. Аветисян, Т. Т. Меликян

Управляемый поиск подвижного объекта в одном семействе траекторий в прямоугольной области

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 29/VII 1997)

1. Рассмотрим систему двух управляемых объектов X и Y

$$X\colon \dot{x} = u,\ x(t_0) = x^0;\ |u(t)| \le U,\ x, u \in R^2,$$
$$Y\colon \dot{y} = v,\ y(t_0) = y^0;\ |v(t)| \le V,\ y, v \in R^2,\ U > V,\ t \ge t_0, \tag{1.1}$$
$$x(t) \in D,\ y(t) \in D,\ t \ge t_0,\ D \subset R^2.$$

В (1.1) $u(t)$ и $v(t)$ допустимые управления из класса кусочно-непрерывных функций, а D есть прямоугольник $D = \{(x_1, x_2)\colon 0 \le x_1 \le a,\ 0 \le x_2 \le b\}$. Скажем, что поисковый объект (ПО) X обнаруживает или наблюдает искомый объект (ИО) Y в некоторый момент времени $t \ge t_0$ в том и только в том случае, когда выполняется условие

$$y(t) \in G(x(t)), \tag{1.2}$$

где $G(x(t)) \subset R^2$ – некоторое подвижное выпуклое компактное множество, связанное с текущим значением фазового вектора $x(t)$.

Сформулируем задачу гарантированного поиска ([1]).

Задача. Найти начальный вектор $x^0 \in D$, число $T \ge t_0$ и допустимое управление $u(t)$ поискового объекта X на интервале времени $[t_0, T]$, для которых при любом начальном векторе $y^0 \in D$ и любом допустимом управлении $v(t)$ искомого объекта Y на интервале $[t_0, T]$ гарантируется выполнение условия (1.2) в некоторый момент $t \in [t_0, T]$.

Отметим, что X, выбирая свое управление, опирается лишь на информацию (1.1), не имея при этом информации об управлении $v(t)$, о его начальном $y(t_0)$ и текущем $y(t)$ фазовых состояниях.

2. Пусть проекция области $G(x(t))$ на оси OX_1 есть отрезок $[x_1(t)-\delta^{\min}, x_1(t)+\delta^{\max}]$. Тогда область $G(x(t))$ можно представить в виде совокупности областей $L_{\delta/\delta\in\Delta}, \Delta=[-\delta^{\min},\delta^{\max}]$, где L_δ множество точек, образующее параллельный оси OX_2 отрезок, имеющий длину $l_\delta = L_\delta^+ - L_\delta^-$ и проекцию $x_1^\delta = x_1(t)+\delta$ на оси OX_1. Условие наблюдения (1.2) перепишем в виде

$$y(t) \in G(x) \equiv \bigcup_{\delta\in\Delta} L_\delta, \tag{2.1}$$

где $\quad l_\delta = \{(\xi_1,\xi_2)\in R^2 : \xi_1 = x_1(t)+\delta, x_2(t)+L_\delta^+ \le \xi_2 \le x_2(t)+L_\delta^-\}, \Delta=[-\delta^{\min},\delta^{\max}]$.

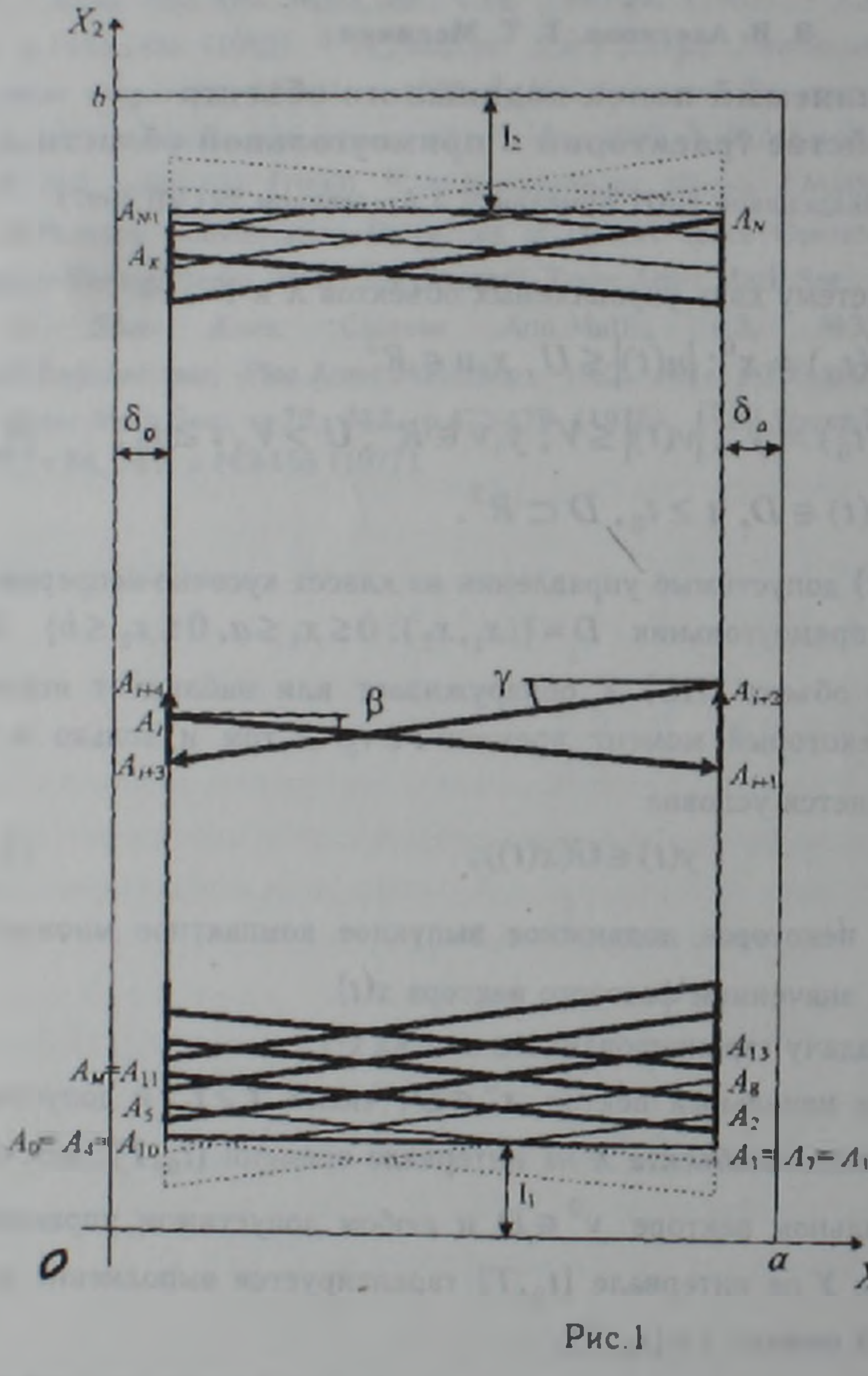

Рис.1

Опишем сначала предлагаемый способ управления, а затем определим условия на входящие в него параметры, при которых решается задача. Представим траекторию движения X с помощью ломаных так, как это показано на рис.1, где направление движения X, начиная с A_0 с координатами $(\delta_0, l_1 = \min\{L^-_{\delta/\delta=-\delta_0}, L^-_{\delta/\delta=\delta_a}\})$ и кончая в A_N с координатами $(a-\delta_a, l_2 = \min\{L^+_{\delta/\delta=-\delta_0}, L^+_{\delta/\delta=\delta_a}\})$, совпадает с направлением возрастания индексов вершин A_i, i=0,...,N, а углы β, γ определяют наклоны участков A_iA_{i+1}, $A_{i+2}A_{i+3}$ относительно оси OX_1 соответственно, $-\pi/2<\beta<\pi/2$, $-\pi/2<\gamma<\pi/2$. Величину максимальной скорости по каждому участку траектории определим максимальной $|u(t)|=U$. Как видно из рис.1, представленные траектории, начиная с некоторой промежуточной вершины $A_M, M>0$, лежащей на прямой $x_1=\delta_0$ и кончая в некоторой вершине $A_K, K=M+4J$ (J – неотрицательное число), лежащей на той же прямой, повторяются с каждой пятой вершины A_{M+4j}, j=0,1,...,J–1, со сдвигом на некоторую величину h>0 и удовлетворяют следующим условиям:

$$
\begin{gathered}
A_iA_{i+1}\|A_{i+4}A_{i+5},\ |A_iA_{i+1}|=|A_{i+4}A_{i+5}|,\ h=x_2^{i+4}-x_2^i>0,\\
A_i=(\delta_0,x_2^i),\ A_{i+1}=(a-\delta_a,x_2^{i+1}),\ A_{i+2}=(a-\delta_a,x_2^{i+2}),\\
A_{i+3}=(\delta_0,x_2^{i+3}),\ A_{i+4}=(\delta_0,x_2^{i+4}),\ A_{i+5}=(a-\delta_a,x_2^{i+5}),\\
0\le\delta_0\le\delta^{\min},\ 0\le\delta_a\le\delta^{\max},\ i=M+4j,\ j=0,1,\dots,J,\ J\in N.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Для фиксированного i, i=M+4j, j=0,1,...,J–1, ломаную $A_{i,i+4}=A_i\dots A_{i+4}$, зависящую от четырех параметров x_2^{i+m}, $m=1,2,3,4$, и от параметров δ_0, δ_a, $(0\le\delta_0\le\delta^{\min}, 0\le\delta_a\le\delta^{\max})$, назовем полным циклом траектории движения X, а число J – количеством полных циклов. Траектории с началами A_0, A_K и концами A_M, A_N соответственно, представляющие собой неполные циклы, отличаются от полных тем, что участки траекторий (на рис.1 показаны мелкими пунктирами), лежащие вне прямоугольника $\overline{D}=\{(x_1,x_2)\in D,\ \delta_0\le x_1\le a-\delta_a, l_1\le x_2\le b-l_2\}$, заменены соответствующими отрезками на горизонтальных сторонах прямоугольника $\overline{D}$. Очевидно, что от значений параметров x_2^{i+m}, δ_0, δ_a зависит структура как промежуточного полного цикла $A_{i,i+4}=A_i\dots A_{i+4}$, так и всей траектории $A_{0,N}=A_0\dots A_N$.

Обозначим через $\Delta t_s\subset[t_0,T]$, s=1,...,S, время перемещения X от вертикальной стороны $x_1=\delta_0$, $0\le\delta_0\le\delta^{\min}$ к другой вертикальной стороне $x_1=a-\delta_a$, $0\le\delta_a\le\delta^{\max}$ (или наоборот), где S определяет число перемещений между боковыми сторонами. Очевидно, что при каждом таком переходе, при любом допустимом управлении существует $v(t)$, $t\in\Delta t_s$, некоторый непустой интервал времени $\Delta t'_s \subseteq \Delta t_s$, на котором абсцисса $y_1(\tau), \tau \in \Delta t'_s$, совпадает с абсциссами некоторых отрезков $L_{\delta/\delta\in\Delta'}$, где подобласть $\Delta' \subseteq \Delta$ зависит от управления $v(t)$. Чем ближе находится ИО Y у боковых сторон $x_1 = 0$, $x_1 = a$ области D, тем в меньшее количество отрезков L_δ объект Y может попасть (Δ' уменьшается). Во всех случаях абсцисса Y равняется с абсциссой хотя бы одного отрезка $L_{\delta/\delta\in\Delta'}$, поскольку $\Delta' = \Delta(v(t)) \neq \varnothing$.

Определение. *Назовем D_t, $D_t \subseteq D$, областью безопасного передвижения Y в момент времени t, если для любой точки $M' \in D_t$ существует начальное положение $y(t_0) \in D$ и допустимое управление $v(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$, при которых Y может за время $t - t_0$ достичь точки M', избегав наблюдения. Кривую $\Gamma_t = [D_t] \setminus D_t$, где $[D_t]$ есть замыкание области D_t, назовем предельной для Y.*

Лемма. *Пусть X перемещается по некоторой траектории $A_{0,N}$ с промежуточным полным циклом (2.2) и $t_0, t_1, \ldots, t_N = T$ – моменты прохождения X вершин $A_0, A_1, \ldots, A_N$ соответственно. Тогда для того, чтобы обнаружение (2.1) ИО Y осуществилось не позже времени $t_N = T$, достаточно, чтобы для произвольного $s=1,\ldots, S$ при любом допустимом управлении $v(t)$, $t \in \Delta t_s$, выполнялось условие*

$$\exists \delta \in \Delta'(v) \subset \Delta, \text{ что } y_2(\tau) \le x_2(\tau) + L_\delta^-, \text{ когда } y_1(\tau) = x_1(\tau) + \delta. \quad (2.3)$$

Таким образом, задача поиска заключается в определении таких условий на параметры задачи, задающие структуру траектории $A_{0,N}$, при которых гарантируется выполнение условия (2.3) на всем интервале времени $[t_0, T]$.

Пусть поиск завершается в некоторый момент $t \ge t_0$. Тогда условие обнаружения (2.1) выполняется при прохождении поискового объекта по ломаной некоторого полного или неполного цикла. Поскольку время прохождения X по ломаной полного цикла больше соответствующего времени прохождения любого неполного цикла, то исследование выполнения условия (2.3) достаточно провести при перемещении X по некоторой $A_{i,i+4}$, $i=M+4j$, $j=0,\ldots,J-1$.

3. Допустим, что ПО X, начиная движение из вершины $A_0(\delta_0, l_1)$, по описанному выше способу в момент времени $t = t_{i+1}$ (в предположении, что условие (2.3) выполнено к этому моменту) приходит к вершине $A_{i+1}(a - \delta_a, x_2^{i+1})$, где

$$x_2^{i+1} = x_2^{i+1}(\mu) = x_2^i + (a - \delta_0 - \delta_a)\mu, \ \ \mu = \operatorname{tg}\beta, \ |\beta| < \pi/2. \quad (3.1)$$

С момента $t = t_{i+1}$ движение X происходит по вертикали $x_1 = a - \delta_a$ из точки $A_{i+1}(a - \delta_a, x_2^{i+1})$ в точку $A_{i+2}(a - \delta_a, x_2^{i+2})$ с ординатой

$$x_2^{i+2} = x_2^{i+2}(\mu, d_a) = x_2^i + (a - \delta_0 - \delta_a)\mu + d_a,\ 0 \le d_a \le d_a^{\max}. \qquad (3.2)$$

Здесь $d_a^{\max}$ та максимальная величина продвижения по вертикали $x_1 = a - \delta_a$, при которой кривая $\Gamma_{t_{i+2}} = \Gamma_{t_{i+2}}(\mu, d_a) = [D_{t_{i+2}}] \setminus D_{t_{i+3}}$ касается с областью наблюдения $G(x(t_{i+2}))$.

4. Найдем координаты вершины A_{i+3}, приходя в которую по прямой $A_{i+2}A_{i+3}$ объект X обеспечивает выполнение условия (2.3) для произвольного t, $t_{i+2} \le t \le t_{i+3}$. Для этого нижнюю точку $(a - \delta_a + \delta, x_2^{i+2} + L_\delta^-)$ отрезка $L_{\delta/\delta\in\Delta}$ области наблюдения $G(x(t_{i+2}))$ поисковой системы X рассмотрим в качестве преследующего объекта, а произвольную точку на предельной кривой $\Gamma_{t_{i+2}}$ – в качестве преследуемого объекта. Тогда множество встреч объектов X и Y представится семейством кругов Апполония ([2])

$$K(x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1) \le 0, \text{при } (x_1^0, x_2^0) = (a - \delta_a + \delta, x_2^{i+2} - l), (x_1^1, x_2^1) \in \Gamma_{t_{i+2}}, \delta \in \Delta$$

$K(x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1) = (x_1 - x_1^1)^2 + (x_2 - x_2^1)^2 - ((x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2)q^2$, $q = V/U$. Пусть $\partial K_{i+2}^-(\delta)$ есть нижняя часть границы области $K_{i+2}(\delta)$, лежащей в области D

$$K_{i+2}(\delta) = \left(\bigcup_{(x_1^1, x_2^1) \in \partial\Gamma_{t_{i+2}}} K(x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1) \right) \cap D.$$

Обозначим через $\sigma = (x_2^{i+1} - x_2^{i+3} + d_a)/(a - \delta_0 - \delta_a) = tg\gamma$, где γ есть угол наклона $A_{i+2}A_{i+3}$ относительно оси OX_1. При движении объекта X по участку $A_{i+2}A_{i+3}$ все отрезки $L_{\delta/\delta\in\Delta}$ проходят одно и то же расстояние $a - \delta_0 - \delta_a$ по абсциссной оси OX_1, и нижняя точка L_δ^- отрезка $L_{\delta/\delta\in\Delta}$ либо во все время движения $[t_{i+2}, t_{i+3}]$ остается выше соответствующих кривых $\partial K_{i+2}^-(\delta)$, либо пересекается с ней, либо остается ниже ее. Обозначим через $\aleph_\delta(\sigma) \subseteq [0, a]$ подобласть оси OX_1, где движение нижней точки L_δ^- отрезка L_δ области наблюдения проходит ниже кривой $\partial K_{i+2}^-(\delta)$. Выберем величину наклона σ отрезка $A_{i+2}A_{i+3}$ из условия

$$\sigma^0 = \min\left\{\sigma : \bigcup_{\delta\in\Delta} \aleph_\delta(\sigma) \subseteq [0, a]\right\}.$$

Тогда справедлива

Лемма. *Движение X из точки $A_{i+2}(t_{i+2})$ в точку $A_{i+3}(t_{i+3})$ по наклону σ^0 обеспечивает выполнение условия (2.3) к моменту $t = t_{i+3}$. Любое другое продвижение по отрезку $A_{i+2}\tilde{A}_{i+3}$, где $\tilde{A}_{i+3} = (a, \tilde{x}_2^{i+3})$, $\tilde{x}_2^{i+3} > x_2^{i+3}$, не гарантирует выполнение условия (2.3).*

Ординату x_2^{i+3}, удовлетворяющую лемме, можно определить таким образом:

$$x_2^{i+3} = x_2^{i+3}(\mu, d_a) = x_2^i + (a - \delta_0 - \delta_a)(\mu - \sigma^0) + d_a \qquad (4.1)$$

5. Как и в случае перехода X из точки A_{i+1} в точку A_{i+2}, на интервале времени $[t_{i+3}, t_{i+4}]$ при переходе X из точки A_{i+3} в точку A_{i+4} можно построить соответственно предельные кривые $\Gamma_{t_{i+3}} = \Gamma_{t_{i+3}}(\mu, d_a, \delta_0, \delta_a)$, $\Gamma_{t_{i+4}} = \Gamma_{t_{i+4}}(\mu, d_a, d_0, \delta_0, \delta_a)$, ординату

$$x_2^{i+4}(\mu, d_a, d_0, \delta_0, \delta_a) = x_2^{i+3} + d_0,\ 0 \le d_0 \le d_0^{\max}, \qquad (5.1)$$

где $d_0^{\max}$ определяется аналогично $d_a^{\max}$ (3.2), а также величину $\mu' = \mu'(\mu, d_0, d_a, \delta_0, \delta_a) = (x_2^{i+5} - x_2^{i+4}) / a = tg\beta'$, где β' есть угол наклона прямой A_4, A_5 относительно оси OX_1. Чтобы удовлетворить условиям (2.2), следует выбрать параметр d_0 (определяющий величину $h = d_0 - d_0'$ продвижения по области D) из интервала $d_0' \le d_0 \le d_0^{\max}$, где $d_0' = x_2^i - x_2^{i+3}$, если $0 < x_2^i - x_2^{i+3} < d_0^{\max}$, и $d_0' = 0$, если $x_2^i - x_2^{i+3} \le 0$.

Для нахождения параметра d_0, обеспечивающего движение X по требуемой траектории (2.3), необходимо разрешить относительно d_0 уравнение

$$\mu = \mu'(\mu, d_0, d_a, \delta_0, \delta_a). \qquad (5.2)$$

Для заданных параметров задачи a, l, U, V, при фиксированных параметрах d_a, μ, δ_0 и δ_a, в случае разрешимости уравнения (5.2) однозначно определяются параметр $d_0 = d_0(\mu, d_a, \delta_0, \delta_a)$ и $x_2^{i+4} = x_2^{i+4}(\mu, d_a, \delta_0, \delta_a)$. Таким образом, находя координаты $x_2^{i+m} = x_2^{i+m}(\mu, d_a, \delta_0, \delta_a)$, $m = 1,2,3,4$, согласно (3.1), (3.2), (4.1), (5.1), можно определить структуру траектории полного цикла и, следовательно, структуру всей траектории движения X по области D, обеспечивая тем самым выполнение условия (2.3), что гарантирует обнаружение Y не позже времени T. Поскольку не для всех значений параметров μ и d_a задача имеет решение, то при фиксированных значениях δ_0 и δ_a, обозначая через

$$H_{\delta_0, \delta_a}(\mu, d_a) \subset \{(\mu, d_a) : |\mu| < \infty,\ 0 \le d_a \le d_a^{\max},\ \mu = \mu'\}$$

область на плоскости параметров (μ, d_a), для каждой точки которой существует решение задачи, получим семейство траекторий, обеспечивающих обнаружение Y в некоторый момент $t \le T$. Однако не для всех значений параметров задачи соответствующая область $H_{\delta_0, \delta_a}(\mu, d_a)$ непуста. Найдем соотношения между a, l, U, V, при которых $H(\mu, d_a) \ne \varnothing$. Нахождение искомых соотношений равносильно построению на плоскости переменных $p=l/a$, $q=V/U$, $l=\max_{\delta\in\Delta}(L_\delta^+ - L_\delta^-)$, области

$$\tilde{H}(p,q)=\bigcup_{\delta_0}\left(\bigcup_{\delta_a}\tilde{H}_{\delta_0,\delta_a}(p,q)\right),$$

где $\tilde{H}_{\delta_0,\delta_a}(p,q)=\tilde{H}_{\delta_0,\delta_a}(a,l,U,V)=\{(p,q):H(\mu,d_a)\neq\varnothing\}$ область на плоскости (p,q) при фиксированных значениях δ_0 и δ_a, для каждой точки которой решение задачи поиска существует.

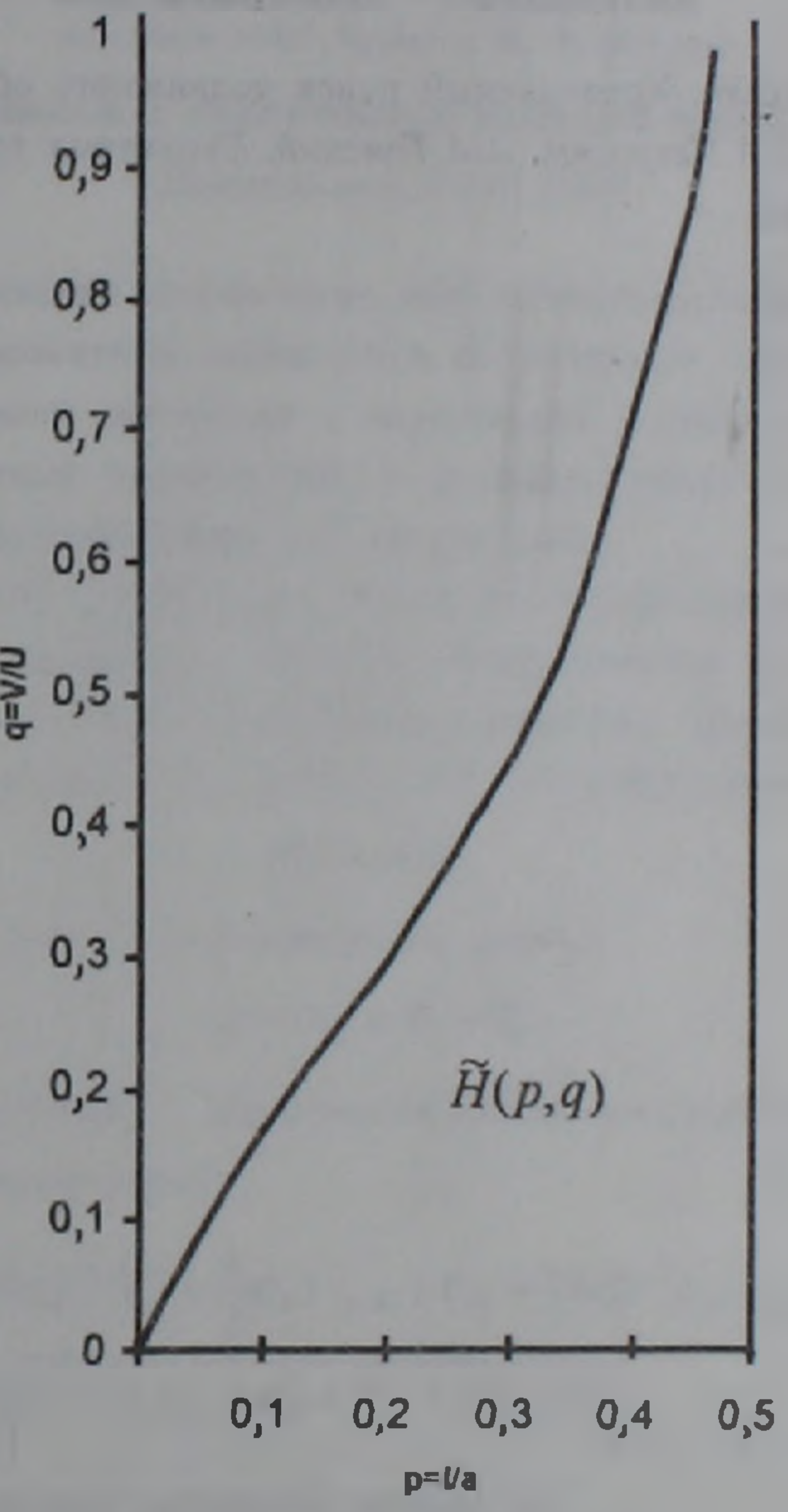

Рис.2

На рис.2 показана численно построенная область $\tilde{H}(p,q)$ в случае, когда область наблюдения представляет собой квадрат с диагональю, равной $2l$

Институт механики НАН Армении

Վ. Վ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Թ. Թ. ՍԵԼԻՔՅԱՆ

Շարժական օբյեկտի ղեկավարելի փնտրումը ուղղանկյուն տիրույթում հետագծերի մի ընտանիքում

Աշխատանքում ուղղանկյուն փակ տիրույթում դիտարկվում է շարժական օբյեկտի ղեկավարելի փնտրման խնդիրը (¹) կամայական փակ և ուռուցիկ դիտման տիրույթի միջոցով: Վերջավոր ժամանակում օբյեկտի հայտնաբերումն ապահովելու համար առաջարկվում է փնտրումն իրականացնել բազմապարամետրանոց հետագծերի ընտանիքում, որն իր մեջ պարունակում է (¹)-ում տրված հետագծերը և շարժական օբյեկտի հայտնաբերումն իրականացնում է խնդրի մեջ մտնող պարամետրերի փոփոխման ավելի լայն դասի համար:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф.Л.Черноусько,* Управляемый поиск подвижного объекта, ПММ, т.44, вып.1 (1980). [2] *Л.А.Петросян, А.А.Томский,* Геометрия простого преследования, Изд.ЛГУ, 1980.