ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

Л. З. Геворкян

Локальная спектральная теория эквипаранормальных операторов

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Захаряном 25/VI 1997)

0. В настоящей заметке показано, что эквипаранормальные операторы удовлетворяют условиям спектральности (A) и (C) Данфорда. Доказана также теорема о пересечении образов.

1. Пусть X банахово пространство, A – (ограниченный) оператор в X. $N(A)$ и $R(A)$ – ядро и образ оператора A соответственно, $r(A)$ – его спектральный радиус и spA – его спектр.

Определение 1. *Оператор называется паранормальным, если для любого элемента $x \in X$ имеет место неравенство*

$$\|Ax\|^2 \le \|A^2 x\| \cdot \|x\|. \tag{1}$$

Пример 1. Пусть A гипонормальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, т.е. $\|A^* x\| \le \|Ax\|$ для произвольного элемента x. Тогда $\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^* Ax, x) \le \|A^* Ax\| \cdot \|x\| \le \|A^2 x\| \cdot \|x\|$, следовательно, любой гипонормальный оператор паранормален. Нетрудно заметить, что

$$\|A^n x\|^2 = \|AA^{n-1} x\|^2 \le \|A^{n+1} x\| \cdot \|A^{n-1} x\|.$$

Обозначим $s_n = \|A^n x\|$. Тогда это неравенство примет вид

$$s_n^2 \le s_{n+1} \cdot s_{n-1} \tag{2}$$

Определение 2. *Числовая последовательность s_n, удовлетворяющая неравенству (2), называется супергеометрической.*

Пользуясь методом математической индукции, нетрудно установить справедливость следующего неравенства:

$$s_n^{p+q} \le s_{n+p}^q \cdot s_{n-p}^q, n, p, q \in Z^+, \ q \le n.$$

Оно нам понадобится для двух частных случаев:

$$s_1^n \le s_n \cdot s_0^{n-1}, \tag{3}$$

$$s_n^{n+1} \le s_{n+1}^n \cdot s_0 . \tag{4}$$

Предложение 1. *Для паранормального оператора его норма и спектральный радиус совпадают.*

Действительно, в силу неравенства (3)

$$\|Ax\| \le \|A^n x\|^{\frac{1}{n}} \cdot \|x\|^{1-\frac{1}{n}} \le \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \cdot \|x\|,$$

откуда

$$\|Ax\| \le \|x\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A) \cdot \|x\|,$$

т.е. $\|A\| \le r(A)$. Так как противоположное неравенство справедливо для произвольного оператора, то $\|A\| = r(A)$.

Заметим, что данное предположение является обобщением результата Андо ([1]) и Стампфли ([2]), доказавших это равенство для гипонормальных операторов. Напомним некоторые факты из данфордовской теории спектральных операторов. Как хорошо известно ([3]), резольвента $R_\lambda(A)$ произвольного оператора A является аналитической вектор-функцией на резольвентном множестве $\rho(A)$. Для любого элемента $x \in X$ вектор-функция $x(\lambda) = R_\lambda(A)x$ аналитична по меньшей мере на $\rho(A)$. В некоторых случаях она допускает распространение на более обширное, чем $\rho(A)$, множество $D_{x(\lambda)}$. Очевидно, что на $D_{x(\lambda)}$ функция $x(\lambda)$ удовлетворяет равенству $(A - \lambda I)x(\lambda) = x$.

Дифференцируя это равенство и пользуясь принципом математической индукции, нетрудно установить также формулу

$$(A - \lambda I)^{n+1} \frac{x^{(n)}(\lambda)}{n!} = x. \tag{5}$$

Определение 3. *Будем говорить, что функция $x(\lambda)$ допускает однозначное распространение в точке μ, если функция $x(\lambda) \equiv 0$ есть единственное аналитическое в некоторой окрестности μ решение уравнения $(A - \lambda I) f(\lambda) \equiv 0$.*

Определение 4. *Будем говорить, что оператор A удовлетворяет условию (A) Данфорда, если функция $x(\lambda)$ допускает однозначное распространение в любой точке. Объединение областей определения $D_{x(\lambda)}$ всевозможных распространений обозначим через $\rho(x)$ и назовем резольвентным* *множеством элемента x, а его дополнение – спектром элемента и обозначим через $\sigma(x)$.*

Введем обозначение

$$Q(A)=\{x\in X: \lim_{n\to\infty}\left\|A^n x\right\|^{\frac{1}{n}}=0\}.$$

Предложение 2. *Для паранормального оператора множество $Q(A)$ совпадает с ядром $N(A)$ оператора A.*

Включение $N(A)\subset Q(A)$ очевидно. Если $x\in Q(A)$, то

$$0\le\left\|Ax\right\|\le\lim_{n\to\infty}\left\|A^n\right\|^{\frac{1}{n}}\cdot\left\|x\right\|^{1-\frac{1}{n}}=0.$$

Это предложение в случае самосопряженного оператора установлено Бродским ([4], лемма 7.1).

Предложение 3. *Паранормальный оператор A обладает свойством однозначного аналитического распространения в точке 0.*

Доказательство этого предложения основано на одном результате Мбекта ([5], предложение 1.10), согласно которому из замкнутости множества $Q(A)$ следует однозначность аналитического распространения функции $x(\lambda)$ в точке 0.

Определение 5. *Оператор A называется эквипаранормальным, если для любого λ оператор $A-\lambda I$ паранормален.*

Нетрудно заметить, что любой гипонормальный оператор эквипаранормален.

Предложение 4. *Эквипаранормальный оператор удовлетворяет условию (A) спектральности Данфорда.*

Аналогичное предложение для гипонормальных операторов было установлено Раджабалипуром ([6]).

Предложение 5. *Пусть оператор A эквипаранормален. Тогда*

$$\left\|x(\lambda)\right\|\le\frac{\left\|x\right\|}{dist(\lambda,\sigma(x))}. \tag{6}$$

где $dist(\lambda,\sigma(x))$ есть расстояние от точки λ до множества $\sigma(x)$.

Установим сначала одно важное неравенство. Пусть z произвольный элемент из X. Неравенство (4) принимает вид

$$\left\|(A-\lambda I)^n z\right\|\le\left\|(A-\lambda I)^{n+1} z\right\|^{\frac{n}{n+1}}\cdot\left\|z\right\|^{\frac{1}{n+1}}.$$

Подставим теперь $z=\dfrac{x^{(n)}(\lambda)}{n!}$. Тогда

$$\|x(\lambda)\| \le \|x\|^{\frac{n}{n+1}} \left\| \frac{x^{(n)}(\lambda)}{n!} \right\|^{\frac{1}{n+1}}.$$

Аналитическая вектор-функция $x(\lambda)$ допускает разложение

$$x(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(\lambda)}{n!}(\mu - \lambda)^n.$$

Радиус сходимости этого ряда, согласно формуле Коши – Адамара, удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{x(\lambda)}{n!} \right\|^{\frac{1}{n}}.$$

С другой стороны, R равен расстоянию от точки λ до ближайшей точки неаналитичности функции $x(\lambda)$, т.е. $dist(\lambda, \sigma(x))$. Тогда

$$\|x(\lambda)\| \le \frac{\|x\|}{dist(\lambda, \sigma(x))}.$$

Это неравенство установлено также Путнамом (7) для гипонормальных операторов и точек λ, не принадлежащих спектру. Стампфли (8) доказал его для гипонормальных операторов с пустым точечным спектром и точек, принадлежащих резольвентному множеству элемента.

Рассмотрим множество $M(F) = \{x : x \in X,\ \sigma(x) \subset F\}$, где $F \subset C$. Легко видеть, что $M(F)$ является инвариантным относительно A линейным многообразием. Оно называется спектральным подпространством, порожденным множеством F.

Определение 6. *Будем говорить, что оператор A удовлетворяет условию (C) спектральности Данфорда, если для любого замкнутого множества F спектральное многообразие $M(F)$ замкнуто.*

Предложение 6. *Эквипаранормальный оператор удовлетворяет условию (C) спектральности Данфорда.*

Пусть $\{x_n\} \subset M(F)$ последовательность, сходящаяся к некоторому x, и λ произвольная точка из дополнения к F. Очевидно, что $\delta = dist(\lambda, F) > 0$. Тогда

$$\|x_n(\lambda)\| \le \frac{\|x_n\|}{dist(\lambda, \sigma(x))} \le \frac{\|x_n\|}{\delta} \le \frac{const}{\delta}.$$

Согласно теореме Монтеля последовательность функций $\{x_n(\lambda)\}$ является нормальным семейством, поэтому существует ее сходящаяся равномерно на контактных подмножествах к некоторой аналитической функции $f(\lambda)$ подпоследовательность $\{x_{n_k}(\lambda)\}$. Тогда

$$(A-\lambda I)f(\lambda)=\lim_{k\to\infty}(A-\lambda I)x_{n_k}(\lambda)=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x.$$

Так как A обладает свойством однозначного аналитического распространения, то $f(\lambda)=x(\lambda)$, чем и завершается доказательство.

Замечание 1. Это предложение доказал также Ли Шао Куан ([9]) (при дополнительном предположении об однозначном аналитическом распространении резольвенты оператора A).

Замечание 2. Раджабалипур ([10]) показал, что любой гипонормальный оператор обладает свойством (C).

Определение 7. *Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется доминантным, если для любого $\lambda\in C$ имеет место включение $R(A-\lambda I)\subset R(A^*-\bar{\lambda}I)$.*

Отметим, что любой гипонормальный оператор доминантен. Из определения доминантного оператора легко следует, что любой собственный элемент оператора A является собственным элементом также оператора A^*. Таким образом, замкнутая линейная оболочка собственных элементов приводит оператор A, а сужение A на это подпространство нормально.

Пусть δ произвольное подмножество комплексной плоскости. Введем обозначение

$$Z_\delta(A)=\{x:x\in\bigcap\nolimits_{\lambda\in\delta}R(A-\lambda I)\}.$$

Нетрудно заметить, что условие $x\in Z_\delta(A)$ эквивалентно существованию функции $f:C\setminus\delta\to X$ такой, что $(A-\lambda I)f(\lambda)\equiv x$.

Предложение 7. *Пусть оператор A эквипаранормален и доминантен, а множество δ замкнуто. Тогда $Z_\delta(A)=M(\delta)$.*

Доказательство основано на теореме Бэра о категориях, неравенстве (6) и нижеследующей серии вспомогательных утверждений. Так как это предложение очевидным образом справедливо для нормальных операторов с чисто точечным спектром, то можно предположить, что оператор A имеет пустой точечный спектр.

Лемма (Клэнси ([11])). *Пусть $x\in Z_\delta(A)$. Тогда функция $\|f(\lambda)\|$ полунепрерывна снизу на $C\setminus\delta$.*

Лемма (Стампфли и Вадхва ([12])). *Пусть оператор A доминантен, множество δ замкнуто и функция $f:C\setminus\delta\to H$, удовлетворяющая условию $(A-\lambda I)f(\lambda)\equiv x$, ограничена. Тогда f аналитична на $C\setminus\delta$.*

Государственный инженерный университет Армении

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Էկվիպարանորմալ օպերատորների լոկալ սպեկտրալ տեսություն

Ցույց է տրված, որ Բանախի տարածությունում գործող էկվիպարանորմալ օպերատորի սպեկտրալ շառավիղը հավասար է նրա նորմին և այդ օպերատորների համար տեղի ունեն Դանֆորդի սպեկտրալության (A) և (C) պայմանները:

Ապացուցված է նաև օպերատորների պատկերների հատման մասին թեորեմը: Ստացված արդյունքները ընդհանրացնում և ճշգրտում են ավելի վաղ այլոց կողմից ապացուցված պնդումները:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *T.Ando,* Pioc.Amer.Math.Soc., v.14, p.290-291 (1963). [2] *J.Stampfli,* Pacilic J.Math., v.12, p.1543-1458 (1962). [3] *Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц,* Линейные операторы, т.3, Спектральные операторы, М., Мир, 1973. [4] *М.С.Бродский,* Треугольные и жордановы представления линейных операторов, М., Наука, 1969. [5] *M.Mbekhta,* Pioc.Amer.Math. Soc., v.110, №3, p.621-631 (1990). [6] *M.Radjabalipour,* Illinois J.Math., v.21, p.70-75 (1977). [7] *C.R.Putman,* Commutation Properties of Hilbert space Operators and Related Topics, Springer-Verlag, Berlin, 1967. [8] *J.Stampfli,* Trans.Amer.Math.Soc., v.217, p.285-297 (1976). [9] *Li Shao Kuan,* Chinese Ann.Math., v.3, №3, p.303-308 (1982). [10] *M.Radjabalipour,* Pioc.Amer.Math.Soc., v.62, №1, p.105-110 (1977). [11] *K.Clancey,* Pioc.Amer.Math.Soc., v.72, №3, p.473-479 (1978). [12] *J.Stampfli, B.Wadhwa,* Monatsh. Math., v.84, №2, p.143-155 (1977).