

УДК 517.53

Р. А. Багиян

Неравенства для дробных производных целых функций произвольного роста

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Захаряном 26 / V 1997)

Как известно, неравенство С.Н.Бернштейна оценивает норму производной целой функции экспоненциального типа σ , ограниченной на действительной оси, с нормой самой функции, т.е.

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(n)}(x)| \leq \sigma^n \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

В статье (1) обобщено это неравенство на случай целой функции произвольного роста (ρ, σ) . На пути достижения этой цели введен класс $B_{\sigma}^{(\rho)}$ ($1 \leq \rho < 2$; $0 < \sigma < +\infty$) целых функций конечного роста (ρ, σ) , ограниченных в специальных угловых областях комплексной плоскости. При $\rho = 1$ это класс целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси. Получена связь между классами $B_{\sigma}^{(\rho)}$ и B_{σ} , т.е., если $F(z) \in B_{\sigma}^{(\rho)}$, то

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(zt) \Phi_{\rho, \mu}(t) dt, \quad (2)$$

где $f(z) \in B_{\sigma^{1/\rho}}$, а $\Phi_{\rho, \mu}(t)$ — функция, подробно исследованная в (2). В (3) этот результат дополняется, а именно устанавливается, что функция $f(z)$, фигурирующая в представлении (2), принадлежит более узкому классу $W_{\sigma^{1/\rho}}^2 \subset B_{\sigma^{1/\rho}}$ ($W_{\sigma^{1/\rho}}^2$ — класс целых функций экспоненциального типа $\sigma^{1/\rho}$, суммируемых с квадратом на всей вещественной оси). Этот результат вместе с формулой обращения для интегрального представления (2) позволил уточнить известное неравенство (1) С.Н.Бернштейна на случай целой функции произвольного роста, а именно, установлено что при

$$F(z) \in B_{\sigma}^{(\rho)} \quad (1 \leq \rho < 2, 0 < \sigma < +\infty, \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho})$$

имеет место точное неравенство

$$\sup_x |F^{(k)}(x)| \leq \sigma^{\frac{k}{\rho}} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})} \sup_x \left| \Phi(1+x \frac{d}{dx}) F(x) \right|, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

где

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(\mu + \frac{s-1}{\rho})}{\Gamma(1+s)}, \quad (4)$$

а $\Phi(1+x \frac{d}{dx}) F(x)$ — оператор, смысл которого рассмотрен в монографии (4) (см. с.90).

Целью данной работы является получение неравенства (3) в терминах дробной Лиувиллевской производной. В случае классического неравенства С.Н.Бернштейна (1) это сделано П.И.Лизоркиным (5) (см. также (6)).

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, приведем некоторые предварительные сведения. Дробные интеграл и производная произвольного порядка α в смысле Римана — Лиувилля определяются посредством соотношений

$$D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in (-\infty, l),$$

$$D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \}, \quad p-1 < \alpha < p, \quad p \geq 1, \quad p - \text{целое.}$$

где $f(x)$ — произвольная функция, интегрируемая в промежутке $(-\infty, l)$. Непосредственным применением этих операторов устанавливаются:

Лемма 1. Если $\omega(t)$ — функция ограниченной вариации на $(-\sigma, \sigma)$ и

$$g(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ux} d\omega(t), \quad (5)$$

то

$$D^{\alpha} g(x) \equiv g^{\alpha}(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} (it)^{\alpha} e^{ux} d\omega(t), \quad (6)$$

где $(it)^{\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} t^{\alpha}$, $t > 0$; $(it)^{\alpha} = e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha} |t|^{\alpha}$; $t < 0$.

Лемма 2. Если $\alpha > 0$ и

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(xt)^{\alpha} \Phi_{\rho, \mu}(t) dt,$$

то

$$D^{\alpha} \{ F(x) \} = \int_0^{+\infty} D^{\alpha} \{ f(xt) \} t^{\alpha} \Phi_{\rho, \mu}(t) dt.$$

Следующие два предложения существенно будут использованы в дальнейшем (см. (2), с.501 и теорему 2 из (5) при $p = +\infty$).

1. Пусть параметры ρ и μ удовлетворяют условию

$$1 < \rho < +\infty, -\infty < \mu < +\infty.$$

Тогда справедлива формула

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(\mu + \frac{z}{\rho})} = \int_0^{+\infty} \tau^z \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau, \operatorname{Re} z > -1. \quad (7)$$

2. Если (5) и (6) имеют место, то

$$\|g^\alpha(x)\|_\infty \leq \sigma^\alpha \|g(x)\|_\infty, \quad (8)$$

где

$$\|g(x)\|_\infty = \sup_x |g(x)|.$$

Теперь приведем основной результат данной работы.

Теорема. Пусть $F(z) \in B_\sigma^{(\rho)}$ ($1 \leq \rho < 2, 0 < \sigma < +\infty, \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$).

Тогда при любом вещественном $\alpha > 1$ имеет место точное обобщенное неравенство Бернштейна

$$\|D^\alpha \{F(x)\}\|_\infty \leq \sigma^{\frac{\alpha}{\rho}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\mu + \frac{\alpha}{\rho})} \left\| \Phi(1+x \frac{d}{dx}) F(x) \right\|_\infty, \quad (9)$$

где $\Phi(s)$ определяется (4).

Доказательство. Применяя теорему 1 из (3), получим, что функция $F(z) \in B_\sigma^{(\rho)}$ допускает представление (2), где $f(z) \in W_{\sigma^{1/\rho}}^2$. В силу теоремы Винера – Пэли имеем

$$f(z) = \int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} e^{i\lambda z} \varphi(\lambda) d\lambda, \in L^2(-\sigma^{1/\rho}; \sigma^{1/\rho}). \quad (10)$$

Но для таких функций имеет место верхнее предложение, т.е. справедливо (8)

$$\|f^\alpha(x)\|_\infty \leq \sigma^{\frac{\alpha}{\rho}} \|f(x)\|_\infty. \quad (11)$$

Из представления (2) в силу леммы 2 будем иметь

$$D^\alpha \{F(x)\} = F^{(\alpha)}(x) = \int_0^{+\infty} D^\alpha \{f(xt)\} t^\alpha \Phi_{\rho, \mu}(t) dt.$$

Оценивая $\sup$ – норму этого выражения с последующим использованием (7), (11) и формулы обращения для представления (2) (см. (3), с.198), получим

$$\begin{aligned} \sup_x |D^\alpha \{F(x)\}| &\leq \sup_x |D^\alpha \{f(xt)\}| \cdot \int_0^{+\infty} t^\alpha \Phi_{\rho, \mu}(t) dt = \\ &= \sup_x |D^\alpha \{f(xt)\}| \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\mu+\alpha/\rho)} \leq \sigma^{\alpha/\rho} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\mu+\alpha/\rho)} \sup |f(x)| = \\ &= \sigma^{\alpha/\rho} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\mu+\alpha/\rho)} \sup_x \left| \Phi\left(1+x \frac{d}{dx}\right) \{F(x)\} \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. Рассмотрим частные случаи. Если α – целое, то получится теорема 2 из статьи автора (см. (3), с.200).

Если $\rho = \mu = 1$, то

$$F(x) = f(x), \quad \Phi\left(1+x \frac{d}{dx}\right) \{F(x)\} = f(x) = F(x),$$

и мы получим неравенство Лизоркина – Сайвина (8).

Если $\rho = \mu = 1$, α – целое, получим классическое неравенство С.Н.Бернштейна.

Полученное нами неравенство (9) точное. Оно достигается на функции типа Миттаг – Леффлера

$$E_\rho(-z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})}.$$

Действительно, в этом случае тип $\sigma = 1$

$$\Phi\left(1+x \frac{d}{dx}\right) \{E_\rho(-x; \mu)\} = e^{-x}; \quad \sup \left| \Phi\left(1+x \frac{d}{dx}\right) \{E_\rho(-x; \mu)\} \right| = 1, \quad x \in [0, +\infty),$$

и мы получим

$$E_\rho^{(\alpha)}(-x; \mu) \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\mu + \frac{\alpha}{\rho})}, \quad x \in [0, +\infty). \quad (12)$$

Легко видеть элементарным подсчетом, что знак равенства в (12) так же, как и в случае целых показателей, достигается в точке $x=0$.

Государственный инженерный университет Армении

Ռ. Ա. ԲԱՂԻՅԱՆ

ԱՆհավասարություններ կամայական ածումով ամբողջ ֆունկցիաների կոտորակային կարգի ածանցյալների համար

Ինչպես հայտնի է Բեռնշտեյնի դասական անհավասարությունը գնահատում է իրական առանցքի վրա սահմանափակված էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիայի ածանցյալի նորման ամբողջ ֆունկցիայի նորմայի հետ: Հեղինակի աշխատանքներից մեկում ⁽¹⁾ ընդհանրացվել է այդ անհավասարությունը կամայական ածումով ամբողջ ֆունկցիաների համար:

Ներկա հոդվածում ընդհանրացվում է այդ անհավասարությունը կոտորակային կարգի ածանցյալների դեպքում: Ստացված է ճշգրիտ անհավասարություն, որը հասանելի է $x=0$ կետում: Դիտարկվում են օրինակներ:

ЛИТЕРАТУРА – ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *Р.А. Багнян*, Изв.АН Арм.ССР, Математика, т.15, №3, с.191-208 (1980).
² *М.М. Джрбашян, Р.А. Багнян*, Изв.АН Арм.ССР, Математика, т.10, №6, с.483-508 (1975); ДАН СССР, т.223, №6, с.1297-1300. ³ *Р.А. Багнян*, ДАН Арм.ССР, т.73, №4, с.195-201 (1981). ⁴ *М.М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости, М., Наука, 1966. ⁵ *П.И. Лизоркин*, Изв.АН СССР, Сер. Матем., т.29, №5, с.109-126 (1965). ⁶ *P. Civil*, Duke Math. J., v.8, №4, p.656-665, (1941).