

УДК 519.1

Р. Р. Камалян, А. Н. Мирумян

Интервальные реберные раскраски двудольных графов одного класса

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукурьяном 22/V 1997)

В работе ⁽¹⁾ введено понятие интервальной реберной раскраски мультиграфа и исследованы задачи о существовании и построении интервальных реберных раскрасок графов некоторых классов. В ⁽²⁾ исследованы интервальные реберные раскраски полных двудольных графов и деревьев. В ⁽³⁾ рассмотрены некоторые задачи о существовании и построении интервальных реберных раскрасок, а также даны оценки количества цветов в таких раскрасках для некоторых классов графов. В ⁽⁴⁾ установлена NP-полнота задачи о существовании интервальной реберной раскраски произвольного двудольного графа. Не определяемые понятия можно найти в ⁽⁵⁻⁷⁾. Задачи об интервальных реберных раскрасках двудольных мультиграфов представляют практический интерес в связи с тем, что они являются графовыми аналогами задач об учебных расписаниях без "окон".

В работе рассматривается задача о существовании интервальной реберной раскраски двудольного графа $G=(X,Y,E)$ с $d_G(y)=2$ для $\forall y \in Y$, $d_G(x)=\Delta=\Delta(G)$ для $\forall x \in X$, $|X|=n$, $|Y|=m$. Обозначим через L_Δ множество всех таких графов.

Доказано, что если $G \in L_\Delta$, то при четном Δ G имеет интервальную Δ -раскраску, а при нечетном Δ – интервальную $(\Delta+1)$ -раскраску.

Отображение $f:E \rightarrow N=\{1,2,\dots\}$ называется раскраской f графа $G=(X,Y,E)$, а $f(e)$ называется цветом ребра e , $e \in E$. f называется правильной раскраской, если $f(e') \neq f(e'')$ для любых смежных ребер e' и e'' . Правильную раскраску f назовем k -раскраской, если f отображает E на множество $\{1,2,\dots,k\}$. k -раскраску f назовем интервальной k -раскраской, если для любой вершины x графа G инцидентные ей ребра окрашены $d_G(x)$ последовательными цветами.

Для раскраски f графа G , вершины $x \in V(G)$ и произвольного натурального q положим $d_{G,f}(x, q) = |\{e \in E(G) / e \text{ инцидентно } x, f(e) = q\}|$.

Для произвольного подмножества R множества вершин графа G и любой вершины x положим $d_G(x, R) = |\{y \in R / (x, y) \in E(G)\}|$.

Лемма 1. Пусть $G = (X, Y, E) \in L_\Delta$ и $|X| = 3$. Тогда G имеет интервальную Δ -раскраску.

Лемма 2. Если $G = (X, Y, E) \in L_4$, то G имеет интервальную 4-раскраску.

Систему $\{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ непустых попарно непересекающихся подмножеств Y назовем разбиением множества Y , если $\bigcup_{i=1}^t R_i = Y$.

Пусть $F = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ является разбиением множества Y и $x \in X$. Скажем, что вершина x является 2-регулярной относительно F , если $d_G(x, R_i) = 2$, $i = 1, \dots, t$. Разбиение F назовем каноническим разбиением Y , если любая вершина x из X 2-регулярна относительно F . Разбиение $F = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ назовем (3,1)-ограниченным, если для любой вершины $x \in X$, $1 \leq d_G(x, R_i) \leq 3$, $i = 1, \dots, t$.

Легко видеть, что для графа $G = (X, Y, E)$ из L_Δ при четном Δ интервальная Δ -раскраска существует тогда и только тогда, когда существует каноническое разбиение множества Y .

Лемма 3. Пусть $G = (X, Y, E) \in L_{2t}$, $t \geq 3$. Тогда существует (3,1)-ограниченное разбиение $F = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ множества Y .

Лемма 4. Пусть $G = (X, Y, E) \in L_{2t}$, $t \geq 3$. Тогда существует (3,1)-ограниченное разбиение $F = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ множества Y такое, что для любой вершины $x \in X$ существует не более одного $i_0, 1 \leq i_0 \leq t$ и не более одного $j_0, 1 \leq j_0 \leq t$, для которых $d_G(x, R_{i_0}) = 3$, $d_G(x, R_{j_0}) = 1$.

Лемма 5. Пусть $G = (X, Y, E) \in L_{2t}$, $t \geq 3$ и $F = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ является неканоническим (3,1)-ограниченным разбиением множества Y . Тогда существует разбиение $F' = \{R'_1, \dots, R'_t\}$ такое, что число 2-регулярных относительно F' вершин X больше числа 2-регулярных относительно F вершин X .

С помощью лемм 2–5 устанавливается

Теорема 1. Для любого $G = (X, Y, E) \in L_\Delta$ при любом четном Δ существует интервальная Δ -раскраска G .

Теорема 2. Для любого $G = (X, Y, E) \in L_\Delta$ при любом нечетном Δ существует интервальная $(\Delta + 1)$ -раскраска G .

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении и
Ереванского государственного университета

Որոշակի դասի երկկողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկուծներ

Աշխատանքում շարունակվում է Ա.Ս.Հասրաթյանի և Ռ.Ռ.Քամալյանի կողմից սահմանված գրաֆների միջակայքային կողային ներկուծների ուսումնասիրությունը: Գրաֆի կողերի ներկումը կոչվում է միջակայքային, k գույներով, եթե $1, \dots, k$ գույներից յուրաքանչյուրը ոգտագործված է առնվազն մեկ կողի համար, և յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերը ներկված են հաջորդական գույներով: Դիտարկված են երկկողմանի գրաֆներ, որոնց մի կողմի բոլոր գագաթների աստիճանները հավասար են 2-ի, իսկ մյուս կողմի բոլոր գագաթների աստիճանները հավասար են Δ -ի:

Ապացուցված է, որ գույգ Δ -ի դեպքում այդպիսի գրաֆն ունի միջակայքային ներկում Δ գույներով, իսկ կենտ Δ -ի դեպքում $\Delta + 1$ գույներով:

ЛИТЕРАТУРА – ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А.С.Асратян, Р.Р.Камалян, Прикладная математика, Ереван, вып.5, с.25-34, 1987.
- ² Р.Р.Камалян, Интервальные раскраски полных двудольных графов и деревьев. Препринт ВЦ АН Арм.ССР. Ереван. 1989.
- ³ Р.Р.Камалян, Интервальные реберные раскраски графов. Канд.дис. Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1990.
- ⁴ С.В.Севастьянов, Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач. Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, вып.50, с.61-72 (1990).
- ⁵ А.С.Асратян, Р.Р.Камалян, J. of Combinatorial Theory, Ser. B, v.62, №1, p.34-43 (1994).
- ⁶ Ф.Харари, Теория графов М., Мир, 1973.
- ⁷ А.А.Зыков, Теория конечных графов. Новосибирск. Наука, 1969.